

SÉRIE : A
N° D'ORDRE : 175
N° DE SÉRIE : 20

THESE

présentée devant

L'UNIVERSITE DE RENNES

U. E. R. Mathématiques et Informatique

pour obtenir

Le Grade de Docteur es-Sciences
de Mathématiques

par

Yann QUENTEL

Sur les diviseurs de zéro et les anneaux de fractions
en algèbre commutative

Soutenue le 18 Juin 1973 devant la Commission d'Examen

M. GIORGIUTTI

Président

M. SAMUEL

M. TOUGERON

M. FERRAND

}
Examineurs

SÉRIE : A

N° D'ORDRE : 175

N° DE SÉRIE : 20

THESE

présentée devant

L'UNIVERSITE DE RENNES

U. E. R. Mathématiques et Informatique

pour obtenir

Le Grade de Docteur es-Sciences
de Mathématiques

par

Yann QUENTEL

Sur les diviseurs de zéro et les anneaux de fractions
en algèbre commutative

Soutenue le 18 Juin 1973 devant la Commission d'Examen

M. GIORGIUTTI

Président

M. SAMUEL

M. TOUGERON

M. FERRAND

Examineurs

1874
1875
1876

THESE

L'UNIVERSITE DE LEIDEN
A LEIDEN

LE DOCTEUR EN LETTRES ET SCIENCES
DE LEIDEN



201 10 1874
DE LEIDEN

Leiden 10 1874

10 1874	10 1874
10 1874	10 1874
10 1874	10 1874

UNIVERSITE DE RENNES

U.E.R. issues de la FACULTE DES SCIENCES

Doyens Honoraires

M. MILON Y.
M. TREHIN R.
M. SCHMITT M.
M. LE MOAL H.
M. MARTIN Y.
M. BOCLE J.

Professeurs Honoraires

M. FREYMANN R.
M. HAGENE P.
M. POISSON R.
M. ROHMER R.
M. TREHIN R.
M. SALMON-LEGAGNEUR F.
M. des ABBAYES H.
M. MILON Y.

Maîtres de Conférences Honoraires

M. GRILLET L.
M. LECRECQ A.

Mathématiques

Professeurs

Melle CHARPENTIER M.
M. GUERINDON J.
M. METIVIER M.
M. GIORGIUTTI I.
M. BRUNEL A.
M. TOUGERON J. C.
M. MIGNOT A.

Maîtres de Conférences & Chargés de Cours

M. LEGOUPIL J.
M. HOUDEBINE J.
M. EUVRARD D.
M. NEDELEC J. C.
M. VERJUS J. P.
M. TRILLING L.
M. FERRAND D.
M. GUIVARC'H Y.
M. KEANE M. (M. C. associé)
M. GILDELAMADRID (Prof. associé)

Physique

M. VACHER M.
M. VIGNERON L.
M. LE BOT J.
Mme ROBIN née SALOMOND
M. ROBIN S.
M. LE MONTAGNER S.
M. MEVEL J. Y.
M. MEINNEL J.
M. REGENSTREIF E.
M. BRUN P.
M. LE ROUX E.
M. DUBOST

M. GUIDINI
M. HAEUSLER C.
M. ARQUES P. Y.
M. DECAMPS E.
M. NUSIMOVICI M. A.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553611_0026

Chimie

M. VENE J.
M. LE MOAL H.
M. LEVAS E.
M. PELTIER D.
M. PRIGENT J.
M. JOUAN P.
M. FOUCAUD A.
M. LANG J.
M. CARRIE R.
M. GUERILLOT C.
M. KERFANTO M.
M. DABARD R.

M. GRANDJEAN D.
M. LUCAS J.
M. DUVAL J.
M. MARTIN G.

Zoologie

M. RICHARD G.
M. MAILLET P.
M. BOISTEL J.
M. RAZET P.
M. FOLLIOU R.
M. ALLEGRET P.
M. MANIEY J.
M. JOLY J.
M. POSTEL (Professeur associé)

M. LEFEUVRE J.C.

Botanique

M. VILLERET S.
M. CLAUSTRES G.
Melle GOAS M.
Melle GOAS G.

Mme LEMOINE C.
M. TOUFFET

Géologie

M. COGNE J.
Melle DURAND S.
M. PHILIPPOT A.

M. BOILLLOT G.
M. HAMEURT J.

Le Secrétaire Général de l'Université

M. BOURDIGUEL R.

INTRODUCTION

Il semble que ce soit Kaplansky qui, le premier, ait signalé qu'un idéal fidèle de type fini d'un anneau commutatif et unitaire peut ne pas contenir d'élément régulier : c'est l'étude de ce phénomène désagréable qui est à l'origine de ce travail.

Dans une première partie, nous étudions les propriétés générales des anneaux "qui ont suffisamment d'éléments réguliers", i.e, qui ne présentent pas l'anomalie dont nous venons de parler. Nous montrons en particulier que tout anneau de polynômes appartient à cette classe : ce résultat sera constamment utilisé dans la suite.

Nous montrons ensuite, dans le chapitre II, qu'un module sans torsion peut prendre de la torsion par extension fidèlement plate des scalaires : pour que ce soit possible, il faut et il suffit que l'anneau de base n'ait pas suffisamment d'éléments réguliers. Cela amène à penser que la notion usuelle de module sans torsion n'est pas la bonne dans le cas général : c'est alors la notion d'anneau total des fractions qui est à réviser. Plusieurs généralisations de cette notion ont déjà été proposées : l'extension rationnelle maximum $Q(A)$ de Johnson-Utumi-Lambek, l'épimorphisme plat maximum $M(A)$ de Lazard, l'enveloppe épimorphe $E(A)$ de Störrer. En fait, c'est l'anneau $M(A)$ qui convenait à nos intentions, d'abord parce que le morphisme $A \longrightarrow M(A)$ est plat par définition, ensuite parce que la localisation de Gabriel associée donne très naturellement la généralisation de la notion de module sans torsion que nous cherchons, enfin parce que, si un anneau A possède suffisamment d'éléments réguliers, l'anneau $M(A)$ coïncide avec l'anneau total des fractions.

Soyons précis, et disons qu'un A -module M est sans m -torsion si le morphisme canonique $M \longrightarrow M(A) \otimes_A M$ est injectif : un module sans m -torsion reste-t-il sans m -torsion après une extension fidèlement plate des scalaires ? En fait, nous n'avons pas pu résoudre ce problème d'une façon pleinement satisfaisante : la raison en est simplement que l'on ne possède pour l'instant aucun moyen de calcul effectif sur l'anneau $M(A)$; en particulier, on ne sait pas caractériser d'une façon simple les anneaux A tels que $A = M(A)$. Les chapitres III et IV sont consacrés entièrement à ces problèmes ; nous montrons que l'on peut définir, pour tout anneau A , un anneau $P(A)$ qui "approche $M(A)$ " dans un sens précis et qui, lui, est accessible au calcul ; notre problème se ramène alors à la comparaison des anneaux $M(A)$ et $P(A)$: malgré la simplicité du critère que nous donnons, nous n'avons pu ni donner un exemple d'anneau pour lequel $M(A) \neq P(A)$, ni montrer que l'on a toujours $M(A) = P(A)$.

Après avoir donné dans le chapitre V une caractérisation topologique des spectres minimaux d'anneaux, nous montrons dans le chapitre VI qu'il existe un cas où, pour des raisons très particulières, l'épimorphisme plat maximum est parfaitement accessible : celui des anneaux réduits à spectre minimal compact. Après avoir étudié ce type d'anneau avec quelques détails, nous pouvons, à l'aide des résultats obtenus, donner au chapitre VII un exemple :

- d'anneau réduit qui ne possède pas suffisamment d'éléments réguliers (l'exemple de Kaplansky possédait des nilpotents non nuls)
- d'anneau réduit pour lequel l'épimorphisme plat maximum ne s'identifie pas à l'anneau total des fractions
- d'anneau réduit à spectre minimal compact dont l'anneau total des fractions n'est pas absolument plat.

Enfin dans une annexe, nous donnons quelques compléments ainsi que des exemples d'application des considérations développées auparavant.

Pour ce qui est de la terminologie, nous avons suivi N. Bourbaki. Tous les anneaux sont commutatifs et unitaires mais, pour que l'espace topologique vide soit homéomorphe à un spectre, nous n'avons pas exclu l'anneau nul. Pour tout anneau A , $\text{Tot}(A)$ désignera l'anneau total des fractions de A et $\mathcal{Q}(A)$ l'anneau de Johnson-Utumi-Lambek de A (pour sa définition, voir [30], pp. 37-39) ; si $A = \text{Tot } A$, nous dirons que A est un anneau total. D'autre part, si X est une partie de $\text{Spec } A$, nous noterons $\text{gen } X$ le générisé de X , c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\text{Spec } A$ qui sont contenus dans un élément de X ; si $X = \text{gen } X$, X sera dit stable par générisation. Si maintenant M est un A -module, $\text{Ass}_A M$ désignera l'ensemble des idéaux premiers de A qui sont (faiblement) associés à M ([31], chap. II), et $I_A(M)$ une enveloppe injective de M .

On pourra trouver la définition et les principales propriétés des anneaux cohérents dans [47] ; pour ce qui est des invariants de Fitting d'un module de type fini, nous renvoyons par exemple à [28], p. 145.

Je tiens à remercier MM. BKOUCHE, FERRAND, LAFON, LAZARD et SAMUEL pour leurs encouragements et leurs conseils : ce sont eux qui m'ont permis de mener ce travail à bonne fin. Je remercie également M. GIORGIUTTI, qui a bien voulu présider mon Jury, ainsi que M. TOUGERON, pour le très intéressant sujet de seconde thèse qu'il m'a donné.

Y. Q.

ETUDE GENERALE DES ANNEAUX AYANT SUFFISAMMENT D'ELEMENTS REGULIERS

§ 1 : La condition (C)

Nous consacrerons ce chapitre à l'étude générale d'une classe d'anneaux que nous allons commencer par définir :

Définition 1.1 : *Un anneau A possède suffisamment d'éléments réguliers s'il satisfait à la condition suivante :*

(C) *Tout idéal fidèle, de type fini de A contient un élément régulier.*

Il nous sera souvent commode de formuler la condition précédente en termes d'idéaux premiers de A . Convenons donc pour la suite de désigner par T_A (resp. P_A) l'ensemble des idéaux premiers de A qui ne contiennent pas d'élément régulier (resp. qui ne contiennent pas d'idéal fidèle de type fini). Naturellement, T_A contient P_A . Réciproquement :

Proposition 1.2 : *Pour tout anneau A , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) *A possède suffisamment d'éléments réguliers*
- ii) $T_A = P_A$.

i $\Rightarrow$ ii : c'est bien clair.

ii $\Rightarrow$ i : soit $\mathfrak{a}$ un idéal fidèle de type fini de A ; si $\mathfrak{a}$ ne contient pas d'élément régulier, il est contenu dans un idéal premier $\mathfrak{p}$ qui n'en contient pas non plus ([9], § 2, n° 5, cor. 1) : par construction, $\mathfrak{p}$ appartient à T_A mais non à P_A .

Nous donnerons au chapitre VII un exemple d'anneau réduit qui ne satisfait pas à la condition (C). Devant cette anomalie, une idée assez naturelle est d'essayer de construire une extension, disons fidèlement plate, de l'anneau qui, elle, possède suffisamment d'éléments réguliers. Il est remarquable qu'il suffise toujours de prendre l'anneau de polynômes, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1.3 : *Pour tout anneau A , l'anneau $A[X]$ possède suffisamment d'éléments réguliers.*

Soit $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de générateurs d'un idéal fidèle et de type fini $\mathfrak{a}$ de $A[X]$, α un majorant du degré des f_i . Le polynôme $\sum_{i=1}^{i=n} X^{i\alpha} f_i$ appartient à $\mathfrak{a}$ et est un élément régulier de $A[X]$, car l'idéal engendré dans A par ses coefficients est fidèle ([38], prop. 6.13).

Ce résultat est en un certain sens le meilleur possible, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1.4 : *Soit A un anneau, $\mathfrak{a}$ un idéal fidèle de type fini de A ; s'il existe une extension projective de type fini B de A telle que $\mathfrak{a}B$ contienne un élément régulier de B , alors $\mathfrak{a}$ contient un élément régulier de A .*

Soit x un élément régulier de $B\mathfrak{a}$, $P(X)$ le polynôme caractéristique de la multiplication par x , considérée comme un endomorphisme $\overline{x}$ du A -module libre de type fini B . Le terme constant a_0 de $P(X)$ est le déterminant de $\overline{x}$, donc est un élément régulier de A puisque $\overline{x}$ est injectif ; d'autre part, $P(x) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton, ce qui montre que a_0 est dans $B\mathfrak{a}$. On en déduit que a_0 est dans $B\mathfrak{a} \cap A$, c'est-à-dire dans $\mathfrak{a}$, ce qui démontre la proposition.

§ 2 : Deux critères pour la condition C

Donnons maintenant deux critères permettant d'affirmer qu'un anneau contient suffisamment d'éléments réguliers.

Proposition 1.5 : *Tout anneau A tel que $\text{Ass}_A(A)$ est fini possède suffisamment d'éléments réguliers.*

Compte tenu du lemme qui suit, cette proposition est une conséquence immédiate de ce qu'un idéal contenu dans l'union d'une famille finie d'idéaux premiers est contenu dans l'un d'entre eux ([9], ch. II, § 1, prop. 2). On retrouve en particulier le fait bien connu qu'un anneau noethérien possède suffisamment d'éléments réguliers.

Lemme 1.6 : *Soient A un anneau, M un A -module, a un idéal de type fini de A . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) il existe $m \neq 0$ de M tel que $ma = 0$.*
- ii) a est contenu dans un élément de $\text{Ass}_A M$.*

Ce lemme n'est autre que le corollaire 1.14 du chapitre II de [31] : il nous sera souvent utile.

Proposition 1.7 : *Soit A un anneau ; on suppose donnée une famille de morphismes $h_i : A \longrightarrow K_i$, où K_i est un corps. On considère les conditions suivantes :*

i) si $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une famille finie d'éléments de A engendrant un idéal fidèle, alors, pour tout i , un des $h_i(x_j)$ est non nul. De plus, un élément x de A tel que $h_i(x) \neq 0$ pour tout i est régulier.

i') le morphisme $A \longrightarrow \prod_i K_i$ est injectif.

ii) pour tout entier n , il existe un polynôme P_n de $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ qui, pour tout i , ne possède dans K_i^n que le zéro $(0, 0, \dots, 0)$.

Alors, si ii) et i) ou bien ii) et i') sont vérifiées, A possède suffisamment d'éléments réguliers.

On vérifie en effet, dans les deux cas, que, si $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ est un système de générateurs d'un idéal a fidèle de type fini de A , $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est un élément régulier de a . On remarquera que le lemme 1.6 entraîne que la condition i est satisfaite, si l'on considère les morphismes canoniques de A dans les corps résiduels des anneaux A_p , où p décrit $\text{Ass}_A A$. Quant à la condition ii, elle est satisfaite par exemple si tous les corps K_i sont ordonnables, ce qui explique que les anneaux usuels de l'analyse satisfassent à la condition (C).

Par une méthode tout à fait analogue à celle de la proposition précédente, on peut montrer que, si un anneau A n'a pas d'idéal premier associé immergé, A et A_{red} satisfont simultanément à la condition (C). Précisément :

Proposition 1.8 : Soient A un anneau, $\mathfrak{f}$ un idéal de A tel que l'image canonique de $\text{Ass}_{A/\mathfrak{f}} (A/\mathfrak{f})$ dans $\text{Spec } A$ soit $\text{Ass}_A A$; alors A et $A/\mathfrak{f}$ satisfont simultanément à la condition (C).

Il y a une analogie entre les propositions 1.5 et 1.7. Dans les deux cas, on démontre une propriété plus forte que la condition (C), à savoir que, si les $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ engendrent un idéal fidèle dans A , alors, la sous- $\mathbb{Z}$ -algèbre (sans élément unité) de A engendrée par les x_i contient un élément régulier dans A . C'est évidemment la raison de la facilité de ces

deux propositions. Si l'on fait des hypothèses plus générales sur l'anneau, il devient beaucoup plus difficile de savoir si la condition (C) est satisfaite : par exemple, on ne sait pas si un anneau cohérent possède suffisamment d'éléments réguliers, quoique cela soit prouvé si l'anneau est en plus de dimension faible finie (cf. corollaire 6.14).

§ 3 : Les anneaux absolument totaux

La condition (C) peut se vérifier directement sur l'anneau total des fractions. Précisément :

Proposition 1.9 : *Pour qu'un anneau possède suffisamment d'éléments réguliers, il faut et il suffit que son anneau total de fractions n'ait pas d'autre idéal fidèle de type fini que l'idéal unité.*

On sait en effet que si A est un anneau, S une partie multiplicative de A et b un idéal de type fini de $S^{-1}A$, il existe un idéal de type fini a de A tel que $b = S^{-1}a$.

Ceci nous amène à poser la définition suivante :

Définition 1.10 : *Un anneau est dit absolument total si son seul idéal fidèle de type fini est l'idéal unité.*

Les anneaux absolument totaux sont donc les anneaux totaux qui satisfont à la condition (C) ou encore les anneaux pour lesquels $P_A = \text{Spec } A$. Ils joueront un rôle important dans la suite, et nous allons dès maintenant en donner quelques propriétés d'autant plus remarquables que l'on ne peut pas dire grand chose des anneaux totaux en général.

Proposition 1.11 : Pour tout anneau A , les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) A est absolument total
- ii) tout élément libre d'un A -module libre de type fini engendre un facteur direct
- iii) le quotient d'un A -module projectif par un sous-module projectif de type fini est projectif
- iv) tout A -module d'infinie présentation finie et de dimension homologique finie est projectif
- v) le quotient d'un A -module plat par un sous-module projectif est plat.

L'équivalence de i, ii, iii est démontrée dans [6], th. 4.9 et 5.4. Il est clair d'autre part que iii entraîne iv par récurrence sur la dimension homologique, et que réciproquement iv entraîne ii. Le fait que v entraîne ii résulte de ce qu'un A -module plat de présentation finie est projectif. Soit maintenant M un A -module plat et P un sous-module projectif de M ; pour montrer que iii entraîne que M/P est plat, on peut, quitte à ajouter à M un complément projectif, se limiter au cas où P est libre, puis reprendre intégralement la démonstration donnée par D. Lazard dans le cas où A est local ([31], chap. II, prop. 4.5).

Corollaire 1.12 : Pour tout anneau A , il existe un monomorphisme plat de A dans un anneau absolument total.

Compte tenu des propositions 1.3 et 1.9, il suffit de prendre le morphisme $A \longrightarrow \text{Tot } A[X]$.

Corollaire 1.13 : *Un anneau A est absolument total si et seulement si tout monomorphisme plat $\rho : A \longrightarrow B$ est fidèlement plat.*

En effet, si A est absolument total, $B/\rho(A)$ est plat d'après la proposition 1.11, donc ρ est fidèlement plat ; réciproquement, si le morphisme $A \longrightarrow \text{Tot } A[X]$ est fidèlement plat, il est clair que, $\text{Tot } A[X]$ étant absolument total, A l'est également.

CHAPITRE II

MODULES SANS TORSION ET CONDITION (C)

Disons qu'un A -module M est sans torsion si, pour tout $x \neq 0$ de M , $\text{Ann}_A(x)$ ne contient que des diviseurs de zéro : il revient au même de dire que $\text{Ass}_A M$ est contenu dans T_A . Le but de ce chapitre est de montrer que M ne reste sans torsion après une extension fidèlement plate quelconque des scalaires que si $\text{Ass}_A M$ est contenu dans P_A : il semble donc que la notion usuelle de torsion ne soit satisfaisante que si l'anneau des scalaires satisfait à la condition (C) introduite au chapitre précédent.

La façon la plus directe et la plus élégante d'aborder ces questions serait évidemment de résoudre en toute généralité le problème suivant : étant donné un A -module M et un morphisme plat d'anneaux $\rho : A \longrightarrow B$, calculer $\text{Ass}_B \rho^*(M)$ connaissant $\text{Ass}_A M$. On n'a pour l'instant des résultats que si A est noethérien ([10], chap. IV, § 2, th. 2) ou si ρ est de présentation finie ([43], prop. 3.4) : cela explique la façon assez artificielle dont nous allons procéder dans ce chapitre.

§ 1 : Trois lemmes préparatoires

Lemme 2.1 : Soit M un A -module ; si, pour tout idéal maximal m de A , M_m est un A_m -module sans torsion, alors M est un A -module sans torsion.

Soit x un élément régulier de A ; les hypothèses entraînent que, si x_M désigne la multiplication par x dans M , $(x_M)_m$ est injectif pour tout m : x_M est donc injectif ([9], chap. II, § 3, n° 3, th. 1).

On remarquera que le lemme précédent n'admet pas de réciproque, même si A est noethérien ou réduit : le fait, pour un module, d'être sans torsion n'est pas ponctuel (cf. la remarque qui suit le corollaire 2.8).

Lemme 2.2 : Soient A un anneau, Γ un foncteur additif de $\text{Mod } A$ dans $\text{Mod } A$.

On suppose que Γ est exact et commute aux sommes directes ; alors $\Gamma(M)$ est un A -module sans torsion pour tout A -module sans torsion M .

Il résulte de [49] que Γ est équivalent à un foncteur de la forme $P \otimes_A$, où P est un A -module plat. On obtient alors le résultat énoncé en écrivant P comme limite inductive filtrante de A -modules libres ([31], chap. I, th. 1.2).

Lemme 2.3 : Soient A un anneau, M un A -module, S une partie multiplicative de A , ρ le morphisme canonique de A dans $S^{-1}A$. Dans ces conditions,

$$\text{Ass}_{S^{-1}A} S^{-1}M = \rho^{-1}(\text{Ass}_A M).$$

Ce lemme exprime le caractère ponctuel de la notion d'idéal premier associé. On trouvera sa démonstration dans [36], prop. 3.5.

Lemme 2.4 : Soient A un anneau, M un A -module, P un élément de $A[X]$, a_P l'idéal de A engendré par les coefficients de P ; les conditions suivantes sont alors équivalentes :

- i) a_P annule un élément non nul de M
- ii) P annule un élément non nul de $M[X]$.

Il est clair que i implique ii : démontrons donc la réciproque, et supposons d'abord A noethérien. Si ii est réalisée, P appartient à un élément q de $\text{Ass}_{A[X]} M[X]$; d'après [10], chap. IV, § 2, th. 2, il existe un élément

p de $\text{Ass}_A M$ tel que $q = p[X]$, ce qui entraîne que $a_p \in p$ et démontre le résultat dans ce cas particulier. On peut ensuite remarquer que le polynôme $P = \sum_i a_i X^i$ annule un élément non nul de $M[X]$ si et seulement s'il existe une suite non nulle $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments presque tous nuls de M telle que $\sum_p x_p a_{n-p} = 0$ pour tout n . Cette propriété étant de caractère fini, on peut se ramener au cas précédent en considérant, au lieu de A , sa sous- $\mathbb{Z}$ -algèbre engendrée par les a_i .

On remarquera que ce dernier lemme est une conséquence immédiate de la proposition 3.4 de [43] et une généralisation de la proposition 6.13 de [38], que nous avons déjà employée.

§ 2 : Torsion et extension plate des scalaires

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition que nous avons en vue :

Proposition 2.5 : *Pour tout anneau A , les propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) A possède suffisamment d'éléments réguliers
- ii) pour tout morphisme injectif et plat $\rho : A \longrightarrow B$ et tout A -module sans torsion M , $\rho^*(M)$ est un B -module sans torsion.

$i \implies ii$: le morphisme injectif et plat ρ nous donne le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\rho} & B \\
 \alpha \downarrow & \searrow \theta & \downarrow \beta \\
 \text{Tot}(A) & \xrightarrow{\sigma} & \text{Tot}(B)
 \end{array}$$

Soit M un A -module sans torsion ; le morphisme canonique de M dans $\alpha_* \alpha^*(M)$ est alors injectif. D'autre part, σ est injectif et plat, donc, d'après la proposition 1.9 et le corollaire 1.13, fidèlement plat : il en résulte que le morphisme canonique de $\alpha^*(M)$ dans $\sigma_* \sigma^* \alpha^*(M)$ est injectif. Finalement, le morphisme canonique de M dans $\theta_* \theta^*(M)$ est injectif, ce qui nous donne un morphisme injectif de M dans $\rho_* \beta_* \beta^* \rho^*(M)$, donc, puisque ρ est plat, un morphisme B -linéaire injectif de $\rho^*(M)$ dans $\rho^* \rho_* \beta_* \beta^* \rho^*(M)$; or, $\beta_* \beta^* \rho^*(M)$ est un B -module sans torsion, et d'autre part le foncteur $\rho^* \rho_*$ commute aux sommes directes et est exact, puisque ρ est plat. Il résulte alors du lemme 2.2 que $\rho^* \rho_* \beta_* \beta^* \rho^*(M)$ - donc également $\rho^*(M)$ - est sans torsion.

ii $\implies$ i : Soit $\mathfrak{a}$ un idéal fidèle de type fini de l'anneau A , et supposons que $\mathfrak{a}$ ne contienne que des diviseurs de zéro ; $\mathfrak{a}$ serait alors contenu dans un élément $\mathfrak{p}$ de T_A : le A -module $A/\mathfrak{p}$ serait donc sans torsion. Il résulte de la démonstration de la proposition 1.3 que $\mathfrak{a}[X]$, donc $\mathfrak{p}[X]$, contiendrait un élément régulier de $A[X]$, ce qui impliquerait que $A/\mathfrak{p}[X]$ ne serait pas un $[A]$ -module sans torsion, contrairement à ii.

Donnons maintenant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un module particulier reste sans torsion par extension injective et plate des scalaires.

Proposition 2.6 : Soient A un anneau, M un A -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) $M[X]$ est un $A[X]$ -module sans torsion
- ii) pour tout morphisme injectif et plat $\rho : A \longrightarrow B$, $\rho^*(M)$ est un B -module sans torsion
- iii) $\text{Ass}_A M \subset P_A$.

i $\implies$ ii : Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\rho} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A[X] & \xrightarrow{\sigma} & B[X]' \end{array}$$

$A[X]$ possédant suffisamment d'éléments réguliers, $\sigma^* \alpha^*(M)$ est un $B[X]$ -module sans torsion d'après la proposition 2.6. On en déduit que $\beta_* \beta^* \rho^*(M)$ est un B -module sans torsion ; le morphisme canonique de $\rho^*(M)$ dans $\beta_* \beta^* \rho^*(M)$ étant injectif, $\rho^*(M)$ est lui-même sans torsion.

ii $\implies$ i : C'est évident.

i $\iff$ iii : C'est une conséquence immédiate des lemmes 1.6 et 2.4.

Voyons maintenant à quelles conditions un module reste sans torsion par extension plate quelconque des scalaires.

Proposition 2.7 : Soient A un anneau, M un A -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) pour tout morphisme plat d'anneaux $\rho : A \longrightarrow B$, $\rho^*(M)$ est un B -module sans torsion
- ii) A_p est absolument total pour tout p de $\text{Ass}_A M$.

i $\implies$ ii : Soit a un idéal de type fini de A_p différent de l'idéal unité. D'après les lemmes 2.3 et 1.6, un élément non nul de M_p est annulé par a : si a était fidèle, $M_p[X]$ ne serait donc pas un $A_p[X]$ -module sans torsion, contrairement à i.

ii $\implies$ i : Soient q un idéal premier de B , $p = \rho^{-1}(q)$. Du fait que $\text{Ass}_{A_p} M_p \subset \text{Ass}_A M$, $(A_p)_{p'}$ est absolument total pour tout p' de $\text{Ass}_{A_p} M_p$, ce

qui montre que $\text{Ass}_{A_p} M_p \subset P_{A_p}$. Il résulte de la proposition 2.6 que $\rho^*(M)_q$ est un B_p -module sans torsion : $\rho^*(M)$ est donc un B -module sans torsion (lemme 2.1).

Corollaire 2.8 : *Pour qu'un anneau A soit tel que tout A -module sans torsion reste sans torsion par extension plate des scalaires, il faut et il suffit que A_p soit un anneau absolument total pour tout p de T_A .*

On remarquera que si A est noethérien, la condition du corollaire précédent est encore équivalente à $T_A = \text{Ass}_A A$, c'est-à-dire à la stabilité par génératisation de $\text{Ass}_A A$.

CHAPITRE III

LOCALISATIONS DE GABRIEL ET ANNEAUX DE SECTION

Dans sa thèse, P. Gabriel - qui considère d'ailleurs des anneaux éventuellement non commutatifs - a généralisé la notion classique d'anneau de fractions : étant donné un anneau A et un "système topologisant et idempotent" $\mathcal{F}$ d'idéaux de A , il définit un morphisme d'anneaux $\rho_{\mathcal{F}} : A \longrightarrow A_{\mathcal{F}}$ et un foncteur $\Lambda_{\mathcal{F}}$ de $\text{Mod } A$ dans $\text{Mod } A$ de telle manière que, si $\mathcal{F}$ est l'ensemble des idéaux qui coupent une partie multiplicative S , $\rho_{\mathcal{F}}$ s'identifie à $A \longrightarrow S^{-1}A$ et $\Lambda_{\mathcal{F}}$ au "foncteur de fractions" usuel. En ce sens, les systèmes topologisants et idempotents sont aux parties multiplicatives ce que les idéaux sont aux éléments de l'anneau. Cette généralisation est particulièrement intéressante en algèbre non commutative, où la notion d'anneau de fractions pose beaucoup de problèmes : on retrouve d'ailleurs ainsi, comme cas particulier, "l'anneau maximal des quotients" $Q(A)$ déjà défini par Johnson et Utumi ([27], [49]), et Gabriel donne, comme exemple d'applications, une nouvelle démonstration du théorème de Goldie.

Notons cependant que, dans le cas général, le morphisme $\rho_{\mathcal{F}}$ n'est pas plat, le foncteur $\Lambda_{\mathcal{F}}$ n'est pas exact et ne s'identifie pas à $(\rho_{\mathcal{F}})_* (\rho_{\mathcal{F}})^*$

ce qui est difficilement acceptable d'une bonne théorie de la localisation. Pour que tout se passe bien, il suffit d'ailleurs que $\Lambda_{\mathcal{F}}$ soit exact et commute aux sommes directes ([18], chap. 5, cor. 2). La seconde condition ne crée pas de difficultés, mais on ne saurait en dire autant de la première, les conditions données par Gabriel étant assez théoriques. Un problème était donc posé : pour quels $\mathcal{F}$ le foncteur $\Lambda_{\mathcal{F}}$ est-il exact ?

Un peu après, T. Akiba et F. Richman remarquaient que, si B est un anneau compris entre un anneau A et $\text{Tot}(A)$ et si de plus B est plat sur A , B ne s'identifie pas en général à un anneau de fractions de A mais en a néanmoins toutes les bonnes propriétés ([1], [2], [3], [44]). D'un autre côté, guidé par le fait que si A est un anneau commutatif et S une partie multiplicative de A , le morphisme $A \longrightarrow S^{-1}A$ est un épimorphisme dans la catégorie des anneaux, L. Silver définissait une localisation à gauche d'un anneau A -à priori non commutatif- comme un épimorphisme plat à droite $A \longrightarrow B$. Il notait d'ailleurs, mais sans insister, l'analogie existant entre sa notion de localisation et celle de Gabriel [46].

D'un autre côté, en se limitant au cas commutatif, D. Lazard démontrait que pour tout anneau A , il y a bijection entre les épimorphismes plats de source A et les parties du spectre qui, munies du faisceau d'anneaux induit par $\tilde{A}$, sont des schémas affines ([31], chap. IV, prop. 2.5) : du point de vue de la géométrie algébrique, la notion d'épimorphisme plat est donc au moins aussi naturelle que celle d'anneau de fractions. De plus, il montrait l'existence d'un "épimorphisme plat maximum" $A \longrightarrow M(A)$ factorisé d'une manière unique par les bimorphismes plats de source A (la généralisation au cas non commutatif devait être donnée par M. Hacque ([23])). D'autre part, J.P. Olivier explicitait la remarque de Silver et montrait que les notions d'épimorphisme plat et de "bonne" localisation de Gabriel sont équivalentes. Enfin, R. Gablot montrait que toute localisation de Gabriel, pourvu qu'elle satisfasse à une condition de finitude simple, est équivalente à un foncteur-section sur une partie convenable du spectre : on était ramené au point de départ de Gabriel ([18], p. 364).

A peu près au même moment, H. Störrier montrait que, pour tout anneau commutatif réduit A , il existe un bimorphisme essentiel $A \longrightarrow E(A)$ factorisé d'une manière unique par tout bimorphisme essentiel de source A ; de plus, $E(A)$ s'identifie au plus petit sous-anneau absolument plat de $Q(A)$ qui contienne A ([48], th. 11.3). Notons ici encore que $E(A)$ n'est pas en général plat sur A . De leur côté, R. Bkouche, J. Marot et P. Le Bihan, s'inspirant de la théorie des fonctions méromorphes, étudiaient, pour tout anneau A , la limite inductive $P(A)$ des sections de $\tilde{A}$ sur les ouverts quasi-compacts et denses du spectre ; ils établissaient en particulier que le morphisme naturel de A dans $P(A)$ est une localisation de Gabriel et que, pour tout anneau A , $P(P(A)) = P(A)$ ([34], [35]).

Notons cependant que le problème dont nous avons déjà souligné l'importance -la détermination des localisations exactes- n'avancait guère entretemps, et les critères donnés par Hacque ([22]) sont tout aussi théoriques que ceux de Gabriel. La raison en est simple : si les calculs portant sur un module de fractions, par exemple, sont parfaitement élémentaires, il n'en est plus du tout de même dans le cas d'une localisation quelconque ; quel que soit le "langage" utilisé -sections du faisceau structural ou formes linéaires sur les idéaux- on risque d'être vite arrêté par des difficultés insurmontables. C'est ce qui se produit quand on s'attaque au problème qui nous intéressera au chapitre suivant : le calcul effectif de l'anneau $M(A)$, qui est très lié -et cela nous ramène dans le fil de notre travail- à la condition (C). Nous aurons alors besoin des résultats de la théorie de la localisation que nous allons donner maintenant, d'une part parce que nous avons voulu leur donner la forme qui nous conviendra dans la suite, d'autre part parce que nous avons pensé que ce travail de rédaction pouvait être utile, ces résultats étant assez dispersés et même souvent restés inédits.

§ 1 : Quelques propriétés générales des localisations de Gabriel

Nous avons dit qu'un système topologisant et idempotent (s.t.i) doit être considéré comme une "partie multiplicative idéale" : justifions d'abord ce point de vue en étudiant le comportement des s.t.i par changement d'anneaux.

Définition 3.1 : Soient $\rho : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux, $\mathcal{F}$ un s.t.i de A , $B_{\mathcal{F}}^{(*)}$ le s.t.i de B formé par les idéaux qui contiennent un idéal de la forme Ba , avec $a \in \mathcal{F}$: nous dirons que $B_{\mathcal{F}}$ est l'image de $\mathcal{F}$ par ρ ; si $B_{\mathcal{F}} = \{B\}$, nous dirons que ρ inverse $\mathcal{F}$.

Proposition 3.2 : Soient $\rho : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux, $\mathcal{F}$ un s.t.i de A .

i) il existe un morphisme $\rho_{\mathcal{F}} : A_{\mathcal{F}} \longrightarrow B_{B_{\mathcal{F}}}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\rho} & B \\ \text{can} \downarrow & & \downarrow \text{can} \\ A_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\rho_{\mathcal{F}}} & B_{B_{\mathcal{F}}} \end{array}$$

soit commutatif

ii) les foncteurs $\rho_{*} \circ \Lambda_{B_{\mathcal{F}}}$ et $\Lambda_{\mathcal{F}} \circ \rho_{*}$ sont naturellement équivalents.

Cette proposition a été démontrée par J. Marot ([35], prop. 4) ; en voici quelques conséquences :

Corollaire 3.3 : Si A est un anneau et $\mathcal{F}$ un s.t.i de A , le morphisme $A_{\mathcal{F}} \longrightarrow (A_{\mathcal{F}})_{A_{\mathcal{F}}\mathcal{F}}$ est bijectif.

(*) Cette notation n'est pas à confondre avec celle qui désigne le plus grand sous-module $\mathcal{F}$ -négligeable ; nous ne l'emploierons jamais dans ce dernier sens.

Corollaire 3.4 : Soient $\rho : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux, $\mathcal{F}$ un s.t.i de A . On suppose que le morphisme $B \longrightarrow B_{B\mathcal{F}}$ est bijectif ; alors le morphisme canonique $A \longrightarrow A_{\mathcal{F}}$ factorise ρ d'une manière unique.

On remarquera que les deux corollaires précédents donnent une caractérisation du morphisme $A \longrightarrow A_{\mathcal{F}}$ comme solution d'un problème universel.

Voici encore un corollaire, souvent utile dans les calculs où il permet de se limiter au cas où le morphisme $A \longrightarrow A_{\mathcal{F}}$ est injectif.

Corollaire 3.5 : Soient A un anneau, $\mathcal{F}$ un s.t.i de A , A' l'image canonique de A dans $A_{\mathcal{F}}$; alors $A_{\mathcal{F}}$ est canoniquement isomorphe à $A'_{A'\mathcal{F}}$.

Signalons dès maintenant une différence essentielle avec la théorie classique : le morphisme $A \longrightarrow A_{\mathcal{F}}$ n'inverse pas $\mathcal{F}$ en général ; cela est dû à ce que, si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $A_{\mathcal{F}}$ tel que toute forme linéaire sur $\mathfrak{a}$ se prolonge à $A_{\mathcal{F}}$ d'une façon unique, alors $\mathfrak{a} = A_{\mathcal{F}}$ si $\mathfrak{a}$ est monogène, mais cela n'est pas vrai en général, même si $A_{\mathcal{F}}$ est intègre noethérien. Nous allons passer à l'étude de cette question, qui est liée, comme il est d'ailleurs naturel, à la platitude du morphisme $A \longrightarrow A_{\mathcal{F}}$.

Proposition 3.6 : Soient A un anneau, $\mathcal{F}$ un s.t.i. de A , $\rho : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux qui inverse $\mathcal{F}$; on note $N \longrightarrow B$ le noyau de $B \rightrightarrows B \otimes_A B$. Dans ces conditions :

i) il existe un morphisme d'anneaux $\sigma : A_{\mathcal{F}} \longrightarrow N$ et un seul qui rende commutatif le diagramme

$$(D) \quad \begin{array}{ccccc} A_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\sigma} & N & \longrightarrow & B \rightrightarrows B \otimes_A B \\ & \nwarrow & \nearrow \rho & & \\ & & A & & \end{array}$$

ii) si de plus ρ est plat et si $\mathcal{F}$ est le plus grand s.t.i. de A inversé par ρ , σ est un isomorphisme.

Démontrons d'abord le premier point, et rappelons que le noyau U de $A \rightarrow A_{\mathcal{F}}$ est l'ensemble des x de A tels que $\text{Ann}_A x \in \mathcal{F}$: il est donc clair que $\text{Ker } \rho \supset U$. On a d'autre part, un isomorphisme :

$$A_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\sim} \lim_{a \in \mathcal{F}} \text{Hom}_A(a, A')$$

où $A' = A/U$. Soit donc a un élément de $\mathcal{F}$ engendré par $(x_i)_{i \in I}$, φ un élément de $\text{Hom}_A(a, A')$, $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de A qui relèvent $(\varphi(x_i))_{i \in I}$. Le système linéaire :

$$(S) \quad \sum x_i \equiv a_i \quad (U)$$

possède une solution unique dans B : en effet, il existe par hypothèse une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments presque tous nuls de B telle que $\sum u_i x_i = 1$, et on voit que la solution en question est $\sigma_a(\varphi) = \sum u_i a_i$. Mais on démontrerait de même que (S) possède une solution unique dans $B \otimes_A B$: il en résulte que $\sigma_a(\varphi)$ appartient à N . Il est alors facile de vérifier que les σ_a sont compatibles avec les morphismes de transition du système inductif qui définit $A_{\mathcal{F}}$ et donnent donc un morphisme A -linéaire $\sigma : A_{\mathcal{F}} \rightarrow N$ qui est d'ailleurs un morphisme d'anneaux. Il résulte de la définition de σ que c'est le seul morphisme qui rende commutatif (D).

Passons au deuxième point, et remarquons d'abord que la platitude de ρ entraîne $\text{Ker } \rho = U$: σ est donc injectif et A' s'identifie à un sous-

anneau de N . Pour montrer que σ est surjectif, prenons un x de N et posons $b = \text{Ann}_A (A' + x A' / A')$; pour tout y de b , xy est dans A' : x définit donc un morphisme A -linéaire de b dans A' et il résulte de la définition de σ qu'il nous suffit de démontrer que b appartient à $\mathcal{F}$. Or, la platitude de ρ entraîne que $b \cap B$ est l'ensemble des b de B tels que $x \otimes b$ appartienne à $1 \otimes B$; comme $x \otimes 1 = 1 \otimes x$ par hypothèse, on voit que 1 appartient à $b \cap B$, ce qui achève la démonstration.

Proposition 3.7 : Soient A un anneau, $\mathcal{F}$ un s.t.i. de A , $\rho : A \longrightarrow A_{\mathcal{F}}$ le morphisme canonique, $\Lambda_{\mathcal{F}}$ le foncteur localisation associé à $\mathcal{F}$. Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

- i) $\mathcal{F} A_{\mathcal{F}} = A_{\mathcal{F}}$
- ii) Le foncteur $\Lambda_{\mathcal{F}}$ est exact et commute aux sommes directes
- iii) Les foncteurs $\Lambda_{\mathcal{F}}$ et $\rho_* \rho^*$ sont naturellement équivalents.

L'équivalence ii $\iff$ iii est démontrée dans la thèse de Gabriel ([18], chap. V, cor. 2) ; quant à l'équivalence i $\iff$ ii, elle a été prouvée par Hacque ([22], th. 36).

Définition 3.8 : Un s.t.i. d'un anneau A sera dit affine s'il satisfait aux conditions de la proposition précédente.

Nous donnerons plus loin (après la proposition 3.21) des exemples de s.t.i. affines, ou plutôt de "parties affines" associées.

Proposition 3.9 : Soit A un anneau.

- i) si $\mathcal{F}$ est un s.t.i. affine de A , le morphisme $A \longrightarrow A_{\mathcal{F}}$ est un épimorphisme plat dans la catégorie des anneaux
- ii) réciproquement, si $\rho : A \longrightarrow B$ est un épimorphisme plat, le plus grand

s.t.i. de A inversé par ρ est affine et le morphisme canonique de $A_{\mathcal{F}}$ dans B donné par la proposition 3.1 est un isomorphisme

iii) les points i et ii établissent, pour tout anneau A , une bijection entre les s.t.i. affines de A et les épimorphismes plats de source A , considérés à un A -isomorphisme près.

Cette proposition est due à J.P. Olivier ([40], pp. 6-11). Le point iii entraîne que, si $\mathcal{F}$ est un s.t.i. affine de A , $\mathcal{F}$ est le plus grand s.t.i. inversé par le morphisme $A \longrightarrow A_{\mathcal{F}}$. Plus généralement, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux s.t.i. affines de A tels que $A_{\mathcal{F}}$ et $A_{\mathcal{G}}$ soient A -isomorphes, alors $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Remarquons tout de suite, car cela joue un rôle important dans la suite, qu'il n'en est plus de même si l'on suppose seulement que $\mathcal{F}$ par exemple est affine : en d'autres termes, un s.t.i. de l'anneau A peut être tel que le morphisme $A \longrightarrow A_{\mathcal{F}}$ soit un épimorphisme plat sans que $\mathcal{F}$ soit affine. Nous donnerons des exemples à la fin du prochain paragraphe, mais nous allons dès maintenant examiner ce fait de plus près.

Définition 3.10 : Un s.t.i. d'un anneau est de type fini s'il contient un sous-ensemble cofinal formé d'idéaux de type fini.

Si $\mathcal{F}$ est le plus grand s.t.i. de A inversé par le morphisme $A \longrightarrow B$, il est clair que $\mathcal{F}$ est de type fini ; le corollaire suivant est donc une conséquence directe de la proposition 3.3.

Corollaire 3.11 : Un s.t.i. affine est de type fini.

Les s.t.i. de type fini ont la propriété importante suivante, dont nous n'aurons d'ailleurs pas à nous servir.

Proposition 3.12 : Si $\mathcal{F}$ est un s.t.i de type fini, le foncteur $\Lambda_{\mathcal{F}}$ commute aux limites inductives filtrantes.

Cette proposition a été démontrée, en termes équivalents, par R. Goblot ([19], app; cf. aussi la prop. 3.20).

Proposition 3.13 : Soit $\mathcal{F}$ un s.t.i de type fini d'un anneau A ; si $A \longrightarrow A_{\mathcal{F}}$ est plat, c'est un épimorphisme plat.

Soit A' l'image canonique de A dans $A_{\mathcal{F}}$; il est clair que $A_{\mathcal{F}}$ est plat sur A' : le corollaire 3.5 montre donc que l'on peut, quitte à substituer A' et $A'_{\mathcal{F}}$ à A et $\mathcal{F}$ respectivement, supposer que le morphisme $A \longrightarrow A_{\mathcal{F}}$ est injectif, i.e. que les éléments de $\mathcal{F}$ sont fidèles. Soit alors x un élément de A ; il existe, d'après la démonstration de la proposition 3.6, un idéal fidèle de type fini $\mathfrak{a}$ de A tel que $x \mathfrak{a} \subset A$; ceci entraîne que $(x\mathfrak{a} - 1\mathfrak{a}x)\lambda$ est nul pour tout λ de $\mathfrak{a}$, donc que $x\mathfrak{a} - 1\mathfrak{a}x = 0$, puisque le morphisme $A \longrightarrow B \otimes_A B$ est plat. Le lemme suivant montre alors que cette condition implique bien $A \longrightarrow A_{\mathcal{F}}$ est un épimorphisme.

Lemme 3.14 : Pour tout morphisme d'anneaux $\rho : A \longrightarrow B$ les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) ρ est un épimorphisme
- ii) $\text{Ker} (B \rightrightarrows B \otimes_A B) = I_B$
- iii) quels que soient les B -modules M et N , le morphisme canonique de $\rho_*(M) \otimes_A \rho_*(N)$ dans $M \otimes_B N$ est un isomorphisme.

Ce lemme est démontré dans [48], th. 2.2.

Notons enfin que, mis à part les cas que nous avons spécialement étudiés, on ne sait rien de vraiment précis des morphismes $\rho : A \longrightarrow A_{\mathcal{F}}$;

ce ne sont pas en général des épimorphismes, même si $\mathcal{F}$ est de type fini, et il peut même se faire que A soit noethérien sans que $A_{\mathcal{F}}$ le soit (cf. [17], prop. 3.6, compte tenu de la prop. 3.9). On peut cependant montrer que, pour tout sous A -module non nul I de $A_{\mathcal{F}}$, $\rho^{-1}(I)$ est non nul ; en particulier, $A_{\mathcal{F}}$ est un A -module sans torsion. De toutes façons, il ressort de ce qui précède que, si $\mathcal{F}$ n'est pas affine, ce n'est pas le morphisme $A \rightarrow A_{\mathcal{F}}$ qui est intéressant, puisqu'il oublie $\mathcal{F}$, mais bien le foncteur $\Lambda_{\mathcal{F}}$.

§ 2 : Interprétation "faisceautique" des localisations de Gabriel

Proposition 3.15 : *Soit A un anneau*

- i) *une partie X de $\text{Spec } A$ est quasi-compact, stable par générisation (q.c.s.g.) si et seulement si elle est égale à l'intersection des ouverts quasi-compacts qui la contiennent ; ces ouverts quasi-compacts forment alors un système fondamental de voisinages de X*
- ii) *toute intersection de parties q.c.s.g. de $\text{Spec } A$ est encore q.c.s.g.*
- iii) *pour toute partie Y de $\text{Spec } A$, il existe une plus petite partie q.c.s.g. Y^L qui contienne Y ; Y^L est l'ensemble des idéaux premiers p de A tels que tout idéal de type fini contenu dans p soit contenu dans un élément de Y*
- iv) *si Y est quasi-compact, $Y^L = \text{gen } Y$.*

L'intérêt du premier point est de ramener les problèmes de sections sur X d'un faisceau de base $\text{Spec } A$ au cas où X est ouverte. La démonstration de cette proposition étant de pure routine, nous l'omettrons.

Corollaire 3.16 : *Pour tout anneau A , $(\text{Ass}_A)^L = P_A$.*

Cela résulte du lemme 1.6 et du troisième point de la proposition précédente.

Proposition 3.17 : Soient A un anneau, X une partie q.c.s.g. de $\text{Spec } A$, B l'anneau $\Gamma(X, \tilde{A})$, ρ le morphisme canonique de A dans B ; alors :

- i) la restriction σ de ${}^a\rho$ à ${}^a\rho^{-1}(X)$ est un homéomorphisme de ${}^a\rho^{-1}(X)$ sur X
- ii) σ induit un isomorphisme entre les espaces annelés locaux $\tilde{B}|_{{}^a\rho^{-1}(X)}$ et $\tilde{A}|_X$.

Cette proposition est due à Marot - Le Bihan ([34], prop. 2).

On notera qu'il résulte du point i que ${}^a\rho(\text{Spec } B)$ contient toujours X .

Proposition 3.18 : Soit A un anneau

- i) pour tout s.t.i. de type fini $\mathcal{F}$ de A , l'ensemble $X_{\mathcal{F}}$ des idéaux premiers de A qui n'appartiennent pas à $\mathcal{F}$ est une partie q.c.s.g. de $\text{Spec } A$
- ii) réciproquement, pour toute partie q.c.s.g. X de $\text{Spec } A$, l'ensemble $\mathcal{F}_X$ des idéaux de A qui contiennent un idéal de type fini qui n'est contenu dans aucun élément de X est un s.t.i. de type fini de A
- iii) les points i et ii établissent une bijection de l'ensemble des s.t.i. de type fini de A sur l'ensemble des parties q.c.s.g. de $\text{Spec } A$.

Proposition 3.19 : Si $\mathcal{F}$ est un s.t.i. de type fini d'un anneau A , les objets de la sous-catégorie localisante de $\text{Mod } A$ associée à $\mathcal{F}$ sont les A -modules M tels que $\text{Ass}_A M \cap X_{\mathcal{F}} = \emptyset$.

La démonstration des deux propositions précédentes repose uniquement sur la définition de la topologie spectrale et de l'assassin d'un module : nous ne la donnerons pas.

Soient maintenant A un anneau, X une partie q.c.s.g. de $\text{Spec } A$, $\mathcal{F} = \Gamma_X$ le s.t.i. de A associé à X par la proposition 3.18. Pour tout A -module M , $\Gamma(X, \tilde{M})$ est muni naturellement d'une structure $\Gamma(X, \tilde{A})$ -module, donc, par restriction des scalaires, d'une structure de A -module, ce qui donne un "foncteur section" $\Gamma_X : \text{Mod } A \longrightarrow \text{Mod } A$; on a d'ailleurs un morphisme fonctoriel $\mathcal{R}_X : I_{\text{Mod } A} \longrightarrow \Gamma_X$ donné par la restriction de $\text{Spec } A$ à X . De même, $\mathcal{F}$ définit un foncteur localisation $\Lambda_{\mathcal{F}}$ et un morphisme fonctoriel $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} : I_{\text{Mod } A} \longrightarrow \Lambda_{\mathcal{F}}$. Dans ces conditions, on a la proposition suivante, fondamentale pour la suite :

Proposition 3.20 : *Il existe un isomorphisme fonctoriel $I : \Gamma_X \longrightarrow \Lambda_{\mathcal{F}}$ tel que :*

- i) $I \circ \mathcal{A}_X = \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$
- ii) $I(A) : \Gamma(X, \tilde{A}) \longrightarrow A_{\mathcal{F}}$ est un isomorphisme d'anneaux
- iii) pour tout A -module M , les A -modules $[I(A)^* \circ \Gamma_X](M)$ et $M_{\mathcal{F}}$ sont isomorphes.

[En d'autres termes, il est équivalent de couper sur X ou de localiser par $\mathcal{F}$. On trouvera la démonstration de cette proposition, en termes un peu différents, dans [19], app. 2.

Voyons maintenant ce qui se passe quand $\mathcal{F}$ est un s.t.i. affine.

Proposition 3.21 : *Soient A un anneau, X une partie q.c.s.g. de $\text{Spec } A$, B l'anneau $\Gamma(X, \tilde{A})$, ρ le morphisme canonique de A dans B . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) $\rho^{-1}(\text{Spec } B) = X$
- ii) l'espace annelé local $\tilde{A}|_X$ est un schéma affine
- iii) $\mathcal{F}_X$ est un s.t.i. affine de A .

L'équivalence de i et de iii est un simple exercice de traduction à l'aide de la proposition 3.20 : dire que $\overset{a}{\rho}(\text{Spec } B) = Y$ revient à dire que $\mathcal{F}_X B = B$; d'autre part, la proposition 3.17 montre que i implique ii. Enfin, la proposition 2.5 de [31], chap. IV, montre que, si ii est vérifié, ρ est un épimorphisme plat et $\overset{a}{\rho}(\text{Spec } B) = X$; on en déduit que $\mathcal{F}_X B = B$, donc que ii implique i.

Définition 3.22 : Une partie q.c.s.g. X du spectre d'un anneau est affine si elle satisfait aux conditions de la proposition précédente.

On remarquera qu'un ouvert quasi-compact est affine si et seulement si c'est un ouvert affine au sens classique du terme. D'autre part, les propositions 3.21 et 3.9 montrent que, pour tout anneau A , il est équivalent de se donner un s.t.i. affine, une partie affine du spectre, ou un épimorphisme plat de source A .

Deux exemples. Si S est une partie multiplicative de l'anneau, l'ensemble des idéaux premiers de A qui ne coupent pas S est une partie affine du spectre, mais si A est un anneau de Dedekind dont le groupe des classes est sans torsion, il existe des parties affines de $\text{Spec } A$ qui ne peuvent se définir de cette façon ([31], chap. IV, prop. 4.6). Si maintenant A est un anneau noethérien intégralement clos, l'ensemble H des idéaux premiers de hauteurs ≤ 1 est une partie q.c.s.g. de $\text{Spec } A$, et

$$\Gamma(H, \tilde{A}) = \bigcap_{p \in H} A_p = A ;$$

d'après la proposition 3.21, H n'est pas une partie affine de $\text{Spec } A$ que si $H = \text{Spec } A$, autrement dit que si A est un anneau de Dedekind. On remarquera que la localisation de Gabriel transparait à plusieurs endroits de la théorie des diviseurs sur un anneau de Krull, telle qu'elle est exposée dans [11].

§ 3 : Quelques propriétés des parties affines d'un spectre

Proposition 3.23 : Soient A un anneau, X une partie de $\text{Spec } A$, $\mathfrak{h}$ un idéal nilpotent de A ; alors X est une partie affine de $\text{Spec } A$ si et seulement si c'est une partie affine de $\text{Spec } A/\mathfrak{h}$.

Cette proposition résulte immédiatement de la proposition 2.3.5 de [20]. Il est possible qu'il suffise, dans l'énoncé, de supposer que $\mathfrak{h}$ est un nilidéal, mais nous n'avons pas pu le démontrer.

Nous allons maintenant rappeler, pour la commodité, le lemme suivant (cf. [31], chap. IV, prop. 2.4) :

Lemme 3.24 : Soient $f : A \longrightarrow B$ un épimorphisme plat d'anneaux, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A ; dans ces conditions :

- ou bien $\mathfrak{p}$ appartient à ${}^a f(\text{Spec } B)$ auquel cas $B_{\mathfrak{p}}$ est l'unique idéal premier de B au-dessus de $\mathfrak{p}$ et $f_{\mathfrak{p}}$ est un isomorphisme
- ou bien $\mathfrak{p}$ n'appartient pas à ${}^a f(\text{Spec } B)$, $\mathfrak{p}B$ est égal à B et $f_{\mathfrak{p}}$ n'est pas un isomorphisme.

Proposition 3.25 : Soit $\rho : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux ; pour toute partie affine X de $\text{Spec } A$, ${}^a \rho^{-1}(X)$ est une partie affine de $\text{Spec } B$.

Notons $f : A \longrightarrow A'$ l'épimorphisme plat associé à X ; par changement de base, f donne un épimorphisme plat $f \boxtimes_A B = f' : B \longrightarrow B'$ auquel est associé une partie affine Y de $\text{Spec } B$: montrons que Y n'est autre que ${}^a \rho^{-1}(X)$, ce qui démontrera la proposition. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A et $\mathfrak{q}$ un idéal premier de B au-dessus de $\mathfrak{p}$, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\rho} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_p & \xrightarrow{\sigma} & B_q \end{array}$$

où σ est fidèlement plat, montre que f_p et f'_q sont simultanément des isomorphismes, d'où le résultat à l'aide du lemme 3.1.

Signalons que M. Raynaud a étudié la réciproque de la proposition précédente dans le cas où ρ est injectif et entier ([45], exp. n° 5).

Proposition 3.26 : Soit A un anneau

- i) si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de parties affines de $\text{Spec } A$, $\bigcap_{i \in I} X_i$ est encore une partie affine de $\text{Spec } A$
- ii) pour toute partie Y de $\text{Spec } A$, il existe une plus petite partie affine de $\text{Spec } A$ qui contienne Y : nous la noterons Y^0 .

Ce résultat est contenu implicitement dans un papier non publié de J. Marot ([35]). Remarquons d'abord que, pour vérifier le premier point, on peut se limiter aux cas où la famille considérée est soit filtrante décroissante, soit réduite à deux termes. Examinons d'abord le premier cas, et notons B_i l'anneau $\Gamma(X_i, \hat{A})$; si X_i contient X_j , on a un morphisme de restriction $B_i \rightarrow B_j$ qui permet de définir la limite inductive B des B_i . Le morphisme de A dans B que l'on obtient est encore un épimorphisme plat, et l'on vérifie à l'aide du lemme 3.1 que la partie affine associée est $\bigcap_{i \in I} X_i$. Dans le cas maintenant où $(X_i)_{i \in I}$ est réduite à deux termes X_1 et X_2 , on obtient un morphisme "somme amalgamée" $A \rightarrow B_1 \boxtimes_A B_2$ qui est encore un épimorphisme plat et on vérifie, toujours à l'aide du lemme 3.1, que la

partie affine associée n'est autre que $X_1 \cap X_2$. Le point ii est une conséquence évidente du précédent. Notons enfin que nous ne savons pas si toute partie affine est une intersection d'ouverts affines.

La proposition précédente pose un problème : le calcul de Y^0 à partir de Y . Naturellement, quitte à remplacer Y par Y^L , on peut toujours supposer Y q.c.s.g. Comme on pourra le constater, le procédé que nous allons donner est bien théorique (mais en existe-t-il d'autres ?). Le premier point de la proposition 3.21 caractérise les parties affines par une "propriété de stabilité", d'où l'idée d'une construction de ces parties "par approximation successive".

Proposition 3.27 : Soit A un anneau ; pour toute partie q.c.s.g. X de A , notons A_X l'anneau $\Gamma(X, \tilde{A})$, ρ_X le morphisme canonique de A dans A_X , et X_1 l'ensemble $[\rho_X(\text{Spec } A_X)]^L$. De plus, pour tout ordinal ω posons $X_\omega = (X_{\omega-1})_1$ si ω a un antécédent $\omega - 1$ et $X_\omega = [\bigcap_{\alpha < \omega} X_\alpha]^L$, si ω est un ordinal limite. Alors, il existe un ordinal ω_0 tel que $X_{\omega_0+1} = X_{\omega_0}$, et l'on a alors $X_\omega = X^0$.

Remarquons d'abord que si X et Y sont deux parties q.c.s.g. de $\text{Spec } A$ telles que X contienne Y , le morphisme de restriction $A_X \rightarrow A_Y$ montre que X_1 contient Y_1 ; d'autre part, X_1 contient toujours X et on a l'égalité si et seulement si X est affine (prop. 3.17 et 3.21). On voit donc que la proposition résulte de propriétés bien connues des ensembles complètement réticulés.

Naturellement, il serait intéressant de voir ce que donne cette construction dans le cas d'un anneau local noethérien par exemple : cela nous aurait mené trop loin de le faire ici, la question n'étant pas simple.

CHAPITRE IV

EPIMORPHISME PLAT MAXIMUM ET CONDITION (C)

Si l'on admet qu'une localisation n'est vraiment intéressante que si elle est exacte et commute aux sommes directes, on voit l'intérêt que présente l'étude détaillée de l'anneau $M(A)$ de Lazard. On a évidemment toujours une factorisation $A \longrightarrow \text{Tot}(A) \longrightarrow M(A)$, et l'on peut d'abord se poser deux questions :

- $\text{Tot}(A)$ est-il toujours égal à $M(A)$?
- Dans la négative, donner une construction aussi explicite que possible de l'anneau $M(A)$.

Nous allons montrer ici que, pour tout anneau A ayant suffisamment d'éléments réguliers, $\text{Tot}(A)$ est égal à $M(A)$; d'autre part, nous donnerons au chapitre VII un exemple d'anneau réduit pour lequel $\text{Tot}(A) \neq M(A)$. Pour ce qui est de la deuxième question, on est réduit pour l'instant à des conjectures, par exemple que pour tout anneau A , $M(A)$ est égal au $P(A)$ de Bkouche-Marot-Le Bihan. Nous donnerons un critère permettant de vérifier s'il en est ainsi pour un anneau donné : il est simple, mais difficilement applicable en pratique.

§ 1 : L'anneau $M(A)$

Si A est un anneau, convenons pour la suite de désigner par M_A la partie affine de $\text{Spec } A$ associée à l'épimorphisme plat maximum $A \longrightarrow M(A)$.

Proposition 4.1 : Pour tout anneau A , M_A est la plus petite partie affine de $\text{Spec } A$ qui contienne P_A .

En effet, si X est une partie q.c.s.g. de $\text{Spec } A$, le morphisme $A \longrightarrow \Gamma(X, \tilde{A})$ est injectif si et seulement si X contient $\text{Ass}_A A$ ([34], lemme 5), ou, ce qui revient au même (cor. 3.16), P_A ; le résultat annoncé est alors une conséquence immédiate de la définition de $M(A)$ (cf. [31], chap. IV, prop. 3.3 et la démonstration de la proposition 3.26).

On voit donc que l'on peut théoriquement déterminer $M(A)$ par le procédé de la proposition 3.27. Il est alors nécessaire d'introduire l'anneau $\Gamma(P_A, \tilde{A})$, ce que nous allons faire maintenant.

§ 2 : L'anneau $P(A)$

Définition 4.2 : Pour tout anneau A , nous appellerons anneau des fonctions méromorphes de A et nous noterons $P(A)$ l'anneau $\Gamma(P_A, \tilde{A})$.

Proposition 4.3 : Pour tout anneau A , $P(A)$ s'identifie au localisé de A par le s.t.i. $\tilde{\mathcal{F}}_P$ des idéaux qui contiennent un idéal fidèle de type fini. On a donc un isomorphisme :

$$P(A) \xrightarrow{\sim} \lim_{a \in \tilde{\mathcal{F}}_P} \text{Hom}_A(a, A)$$

Simple cas particulier de la proposition 3.9.

Corollaire 4.4 : Soit $\rho : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneau tel que $\text{Ass}_A B \subset P_A$ (i.e, si a est un idéal fidèle de type fini de A , aB est un idéal fidèle de B) ; il existe alors un morphisme $\rho_P : P(A) \longrightarrow P(B)$ et un seul qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\rho} & B \\
 \text{can} \downarrow & & \downarrow \text{can} \\
 P(A) & \xrightarrow{\rho_P} & P(B)
 \end{array}$$

C'est une conséquence immédiate des propositions 3.2 et 4.3.

Proposition 4.5 : Pour tout anneau A , l'anneau $P(A)$ est isomorphe à $\varinjlim_U \Gamma(U, \tilde{\mathcal{A}})$, où U parcourt l'ensemble des ouverts quasi-compacts schématiquement denses de $\text{Spec } A$.

Rappelons que l'ouvert U est schématiquement dense si le morphisme $A \longrightarrow \Gamma(U, \tilde{\mathcal{A}})$ est injectif ; cette condition étant équivalente à $P_A \subset U$ d'après le lemme 5 de [34] déjà cité, la proposition résulte de la définition de l'anneau $P(A)$ et de la proposition 3.15.

On notera que, si A est réduit, un ouvert quasi-compact de $\text{Spec } A$ est schématiquement dense si et seulement s'il est dense, d'où l'expression d'anneau des fonctions méromorphes.

Nous allons maintenant utiliser la proposition 3.6 pour donner une nouvelle définition de l'anneau $P(A)$, particulièrement commode dans la pratique.

Proposition 4.6 : Soient A un anneau, $\rho : A \longrightarrow B$ un monomorphisme plat de A dans un anneau absolument total ; alors $P(A)$ s'identifie au noyau de $B \rightrightarrows B \otimes_A B$.

Cela résulte de la proposition 3.6, car il est clair que le plus grand s.t.i. de A inversé par ρ est $\mathfrak{f}_P$ (cf. prop. 4.3). Naturellement,

l'intérêt de la proposition est qu'il existe toujours un ρ qui satisfasse aux hypothèses (cf. cor. 1.12).

Avant de tirer les conséquences de la proposition précédente, démontrons le lemme suivant.

Lemme 4.7 : Si $A \rightarrow B$ est un monomorphisme plat d'anneaux et si $N \rightarrow B$ est le noyau de $B \rightrightarrows B \otimes_A B$, alors $N \rightarrow B$ est plat et la suite $N \rightarrow B \rightrightarrows B \otimes_N B$ est exacte.

La platitude de $N \rightarrow B$ se vérifie aux idéaux premiers de N qui se relèvent à B : on peut donc se ramener au cas où A est un anneau local dont l'idéal maximal se relève à B ; mais alors $A \rightarrow B$ est fidèlement plat, donc $A \rightarrow B \rightrightarrows B \otimes_A B$ est exacte. D'autre part, on sait que $B \otimes_A B \rightarrow B \otimes_N B$ est surjectif et que son noyau est engendré par les éléments de la forme $c \otimes 1 - 1 \otimes c$; ce noyau est donc nul, ce qui démontre le résultat.

Corollaire 4.8 : Pour tout anneau A , $P(P(A)) = P(A)$.

Conséquence immédiate de la proposition et du lemme précédents.

Corollaire 4.9 : Si $A \rightarrow A'$ est un bimorphisme plat d'anneaux, alors, dans le carré

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & P(A) \\ \downarrow & & \downarrow \alpha \\ A' & \xrightarrow{\beta} & A' \otimes_A P(A) \end{array}$$

α est un isomorphisme et $\alpha^{-1} \circ \beta$ identifie $P(A)$ à $P(A')$.

Soit $A \rightarrow B$ un morphisme injectif et plat de A dans un anneau

absolument total B ; le morphisme $B \longrightarrow B \otimes_A A'$ obtenu par changement de base est un bimorphisme plat, donc un isomorphisme puisque A est absolument total (cf. [31], chap. IV, lemme 1.2 et notre corollaire 1.13).

On a donc un monomorphisme plat $A' \longrightarrow B$, et un isomorphisme $B \otimes_A B \xrightarrow{\sim} B \otimes_{A'} B$, par exemple parce que $A \longrightarrow A'$ est un épimorphisme (cf. lemme 3.14). On obtient alors le résultat par tensorisation de la suite exacte $P(A) \longrightarrow B \rightrightarrows B \otimes_A B$.

Corollaire 4.10 : *Pour tout anneau A , on a un diagramme de monomorphismes d'anneaux*

$$A \longrightarrow \text{Tot}(A) \longrightarrow M(A) \longrightarrow P(A) \longrightarrow Q(A)$$

Le diagramme $A \longrightarrow \text{Tot}(A) \longrightarrow M(A)$ résulte des définitions.

D'autre part, le corollaire précédent montre que $P(M(A)) = P(A)$, ce qui donne le monomorphisme $M(A) \longrightarrow P(A)$. Enfin, $Q(A)$ est le localisé de A pour le s.t.i. des idéaux fidèles de A , plus fin que le s.t.i. $\mathcal{F}_P$, ce qui donne le monomorphisme $P(A) \longrightarrow Q(A)$.

Proposition 4.11 : *Pour tout anneau A , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) $P(A) = A$
- ii) $\text{Ext}_A^1(A/a, A) = 0$ pour tout idéal fidèle de type fini a de A
- ii) pour tout morphisme plat $A \longrightarrow B$, la suite $A \longrightarrow B \rightrightarrows B \otimes_A B$ est exacte.

$i \implies ii$: C'est une conséquence de la proposition 4.3.

$ii \implies iii$: Soit $p = A \longrightarrow B$ un monomorphisme plat ; le noyau de

$B \rightrightarrows B \otimes_A B$ est isomorphe à $A_{\mathcal{F}}$, où $\mathcal{F}$ est le plus grand s.t.i. inversé par

ρ (prop. 3.6). Les hypothèses entraînent que $\tilde{\mathcal{H}}$ possède un système cofinal formé d'idéaux fidèles de type fini : il est alors clair que $A_{\tilde{\mathcal{H}}} = A$ si toute forme linéaire sur un idéal fidèle de type fini se prolonge à A .

iii $\implies$ i : C'est clair.

§ 3 : L'approximation zéro : critères pour que $M_A = P_A$

Proposition 4.12 : *Pour tout anneau A , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) $M_A = P_A$
- ii) P_A est une partie affine de $\text{Spec } A$
- iii) $P(A)$ est absolument total
- iv) $M(A)$ est absolument total
- v) tout idéal fidèle de type fini a de A contient un idéal fidèle de type fini b tel que l'injection canonique $b \longrightarrow a$ se factorise à travers un A -module libre de type fini.

iii $\implies$ ii : En effet, si $P(A)$ est absolument total, $\tilde{\mathcal{H}}_P P(A) = P(A)$: $\tilde{\mathcal{H}}_P$ est alors un s.t.i. affine, d'où le résultat (cf. la proposition 3.7).

ii $\implies$ i : Evident d'après la proposition 4.1.

i $\implies$ iv : Démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 4.13 : *Soit $\rho : A \longrightarrow B$ un épimorphisme plat d'anneaux ; pour tout idéal de type fini b de B , il existe un idéal de type fini a de A tel que $b = Ba$.*

Posons $a' = \rho^{-1}(b)$ et écrivons a' comme limite inductive filtrante

de ses sous-idéaux de type fini : $a' = \varinjlim a_i$; on sait que $Ba' = b$ ([31], chap. IV, prop. 2.1), donc, puisque b est de type fini, on doit avoir $Ba_i = b$ pour un i .

Si maintenant b est un idéal fidèle de type fini de $M(A)$ différent de $M(A)$, il existe d'après le lemme précédent un idéal de type fini a de A tel que $aM(A) = b$; a est évidemment fidèle et contenu dans un élément de M_A , d'où contradiction si $M_A = P_A$.

iv $\implies$ iii : D'après le corollaire 4.9, $P(A) = P(M(A))$; on a donc $M(A) = P(A)$ si $M(A)$ est absolument total.

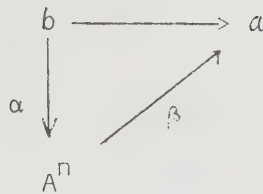
ii $\iff$ vi : Dire que P_A est affine revient à dire que $aP(A) = P(A)$ pour tout idéal fidèle de type fini de A , d'où l'équivalence, compte tenu du lemme suivant :

Lemme 4.14 : *Pour tout idéal a de l'anneau A , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) $aP(A) = P(A)$
- ii) a contient un idéal fidèle de type fini b tel que l'injection canonique de b dans a se factorise à travers un A -module libre de type fini.

i $\implies$ ii : Il est clair que l'on peut supposer a de type fini : soit donc $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de générateurs de a . Il existe par hypothèse n éléments $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $P(A)$ tels que $\sum_1^n a_i \varphi_i = 1$, ainsi qu'un idéal fidèle de type fini c tel que tous les φ_i appartiennent à $\text{Hom}_A(c, A)$: nous poserons $b = ac$. Désignons maintenant par u l'application de b dans A^n définie par $u(x) = (\varphi_i(x))_{1 \leq i \leq n}$ et par v l'application de A^n dans a définie par $v((x_i)_{1 \leq i \leq n}) = \sum a_i x_i$: il est clair alors que $v \circ u$ est l'injection canonique de b dans a .

$i \circ i \Rightarrow i$: Soit



le diagramme donné par l'hypothèse. On peut naturellement supposer β surjectif : l'image $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de la base canonique de A^n par β est alors un système de générateurs de a . Désignons par ψ_i la $i^{\text{ème}}$ forme coordonnée de A^n et posons $\varphi_i = \psi_i \circ \alpha$, φ_i étant identifié à un élément de $P(A)$. On a alors, pour tout x de b : $\beta \circ \alpha(x) = \sum_i a_i \varphi_i x = x$, ce qui implique $\sum_i a_i \varphi_i = 1$.

Proposition 4.15 : *Si un anneau A possède suffisamment d'éléments réguliers, alors $T_A = P_A = M_A$; en particulier, $\text{Tot}(A) = M(A) = P(A)$.*

La condition (C) est équivalente à $T_A = P_A$ (prop. 1.2) et entraîne visiblement la condition vi de la proposition précédente.

Malgré la relative simplicité du critère donné par la proposition 4.14, nous n'avons pu construire un anneau pour lequel $M_A \neq P_A$.

Dans [39], sub fine, Mastacescu et Popescu affirment en substance que $M_A = P_A$ au moins pour tout anneau réduit, mais leur démonstration semble erronée : elle ne tient pas compte de la nécessité d'une itération transfinie dans la construction de l'anneau $M(A)$. Quoi qu'il en soit, l'hypothèse est plausible, et elle est certainement vérifiée par une large classe d'anneaux. Elle entraînerait par exemple que les anneaux tels que $A = M(A)$ sont les anneaux absolument totaux, et que la condition (C) est équivalente à $M(A) = \text{Tot } A$, ce qui serait un joli résultat. De même, comme nous l'avons

dit dans l'introduction, elle donnerait une interprétation très simple de la proposition 2.6, qui pourrait se démontrer sans faire intervenir artificiellement l'anneau de polynômes : la condition $\text{Ass}_A M \subset P_A$ impliquant que le morphisme canonique $M \longrightarrow M \otimes_A M(A)$ est injectif, on pourrait reprendre la démonstration de la proposition 2.5 en considérant, non pas les anneaux $\text{Tot}(A)$ et $\text{Tot}(B)$, mais les anneaux $M(A)$ et $M(B)$.

§ 4 : L'approximation un : conditions pour que $M(A) = P(A)$

Proposition 4.16 : *Pour tout anneau A , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) $P(A) = M(A)$
- ii) $A \longrightarrow P(A)$ est plat
- iii) pour tout idéal fidèle de type fini a de A et toute forme linéaire φ sur a , φ se prolonge à un idéal b de A qui contient a et un idéal fidèle de type fini c tel que l'injection canonique de c dans b se factorise à travers un A -module libre de type fini.

i $\iff$ ii : Cela résulte de la proposition 3.13.

i $\iff$ iii : Soit $\tilde{F}_P$, le plus grand s.t.i. de A inversé par $A \longrightarrow P(A)$. D'après les propositions 3.7 et 3.9, $A \longrightarrow P(A)$ est un épimorphisme plat si et seulement si le morphisme canonique de $A_{\tilde{F}_P}$ dans $P(A)$ donné par la proposition 3.6 est un isomorphisme : or, c'est précisément ce que signifie la condition iii, compte tenu du lemme 4.14.

CARACTERISATION TOPOLOGIQUE DES SPECTRES MINIMAUX D'ANNEAUX

Avant d'étudier les anneaux réduits à spectre minimal compact, nous allons, pour pouvoir mesurer le degré de généralité des résultats que nous obtiendrons, étudier topologiquement les spectres minimaux d'anneaux. Le résultat essentiel de ce chapitre a été trouvé indépendamment par Hochster (cf. [25]), mais la démonstration donnée ici a l'avantage, à notre sens, d'être plus naturelle, puisque, étant donné un espace topologique X satisfaisant à certaines conditions, nous construisons explicitement un anneau ayant un spectre minimal homéomorphe à X .

Si A est un anneau, nous noterons $\text{Min } A$ le spectre minimal de A , c'est-à-dire l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A muni de la topologie spectrale pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de A , nous noterons $D_m((x_i)_{i \in I})$ l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A qui ne contiennent pas tous les x_i ; d'autre part, $\mathcal{F}(A)$ désignera l'ensemble des parties de $\text{Min } A$ de la forme $D_m(F)$, où F est une famille finie d'éléments de A . On sait que $\mathcal{F}(A)$ est une base de la topologie de $\text{Min } A$, stable par union finie.

Rappelons d'abord un fait bien connu ([24], lemme 1.1) :

Lemme 5.1 : *Un idéal premier $\mathfrak{p}$ d'un anneau réduit A appartient à $\text{Min } A$ si et seulement si $\text{Ann}_A x$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{p}$ pour tout x de $\mathfrak{p}$.*

Lemme 5.2 : *Si A est un anneau et $(V_i)_{i \in I}$ une famille filtrante décroissante d'éléments non vides de $\mathcal{F}(A)$, alors $\bigcap_{i \in I} V_i$ est non vide.*

Pour chaque i de I , soit $p_i = \sum_{j \in J} a_j X^j$ un polynôme de $A[X]$ tel que $D_m((a_j)_{j \in J}) = V_i$ et soit S la partie multiplicative engendrée par les p_i dans $A[X]$

Si S contenait 0 , I contiendrait une partie finie K telle que $\prod_{i \in K} p_i$ soit nilpotent ; cela entraînerait que $\bigcap_{i \in K} V_i$ est vide, contrairement aux hypothèses. Il existe donc un idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ de A tel que $\mathfrak{p}[X] \cap S = \emptyset$, ce qui implique que $\mathfrak{p}$ appartient à $\bigcap_{i \in I} V_i$.

Proposition 5.3 : *Pour qu'un espace topologique T soit homéomorphe au spectre minimal d'un anneau, il faut et il suffit que ses points soient fermés et qu'il possède une base $\mathcal{B}$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :*

i) $\mathcal{B}$ est stable par union finie.

ii) toute intersection filtrante décroissante de parties non vides de $\mathcal{B}$ est non vide.

On sait que le spectre minimal d'un anneau est séparé ([24], cor. 2.4) : le lemme précédent montre donc que les conditions sont nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes. On peut d'abord remarquer qu'elles impliquent que tout élément de $\mathcal{B}$ est fermé ; soit en effet V un élément de $\mathcal{B}$; si x appartient à $\overline{V}$, la condition ii implique que l'intersection des voisinages de x qui appartiennent à $\mathcal{B}$ coupe V ; comme $\{x\}$ est fermé, x appartient à V . On voit facilement qu'il en résulte que X est séparé.

Soit maintenant $(V_i)_{i \in I}$ une indexation de $\mathcal{B}$. Considérons le sous-anneau A de $\text{Hom}(T, Z[X_i]_{i \in I})$ engendré par les applications f_i qui valent X_i sur V_i et 0 sur $X - V_i$. Pour tout f de A , nous noterons $\text{sup } f$ (respectivement $\text{cosup } f$) l'ensemble des points de T où f est non nulle (respectivement est nulle). Montrons alors que $\text{sup } f$ appartient à $\mathcal{B}$, est égal à X ou est vide ; pour cela, notons $\delta(f)$ le plus petit entier n tel que f appartienne à un sous-anneau de A engendré par n des f_i . Si $\delta(f) = 0$, f est une constante, et $\text{sup } f$ est vide ou égal à T ; sinon, on peut écrire $f = \sum_{j=0}^n g_j f'$, où f' est un f_i et où les g_j sont combinaison algébrique de $\delta(f) - 1$ des f_i autres que f' . Le fait que les X_i sont algébriquement

indépendants entraîne alors que $\sup f = (\sup g_0 \cup \sup f') \cap (\bigcup_{1 \leq j \leq n} \sup g_j)$, et $\sup f$ appartient bien à $\mathcal{B}$ par récurrence sur $\delta(f)$. On notera en particulier que $\sup f$ et $\text{cosup } f$ sont ouverts et fermés dans T .

Si α est un point de T , l'ensemble des f tels que $\alpha \in \text{cosup } f$ est un idéal premier p_α de A . De plus, si $f \in p_\alpha$, il existe, d'après ce qui précède, un V_i tel que $\alpha \in V_i \subset \text{cosup } f$; on a donc $f f_i = 0$, $f_i \notin p_\alpha$, ce qui, d'après le lemme 4.1, prouve que p_α est un idéal premier minimal de A .

Soit maintenant S une partie multiplicative de A qui ne contient pas 0. La condition ii implique que $\bigcap_{x \in S} \sup x$ n'est pas vide; si α est un élément de cette intersection, on a $S \cap p_\alpha = \emptyset$, ce qui implique que tout idéal premier minimal de A est de la forme p_α pour un α convenable de X . Il est alors clair que $\text{Min } A$ est homéomorphe à X .

Corollaire 5.4 : *Tout espace topologique X homéomorphe au spectre minimal d'un anneau est éparpillé.*

Nous avons vu en effet, au cours de la démonstration de la proposition précédente, qu'un tel espace est séparé et est engendré par ses ouverts et fermés.

Le corollaire précédent ne donne nullement une caractérisation topologique des spectres minimaux d'anneaux, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 5.5 : *Si X est un espace topologique dénombrable homéomorphe au spectre minimal d'un anneau, l'ensemble des points isolés de X est partout dense.*

Soit $\mathcal{B}$ une base de X satisfaisant aux conditions de la proposition 4.1, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un dénombrement de X . S'il existait une partie non vide V de X appartenant à $\mathcal{B}$ qui ne contienne aucun point isolé, on pourrait construire par récurrence une suite décroissante $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments non vides de $\mathcal{B}$ de la façon suivante :

- $V_0 = V$

- V_{n+1} est un élément non vide de $\mathcal{B}$, contenu dans V_n et ne contenant pas x_n .

On voit que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ serait alors vide, contrairement à la condition ii de la proposition 5.3.

Il résulte de la proposition 5.5 que l'espace topologique Q , qui est éparpillé, n'est pas homéomorphe au spectre minimal d'un anneau. On a cependant le résultat suivant.

Proposition 5.6 : *Tout espace topologique localement compact et totalement discontinu est homéomorphe au spectre minimal d'un anneau.*

On sait qu'un espace X localement compact et totalement discontinu est éparpillé ([8], § 4, corol. de la prop. 6), donc possède une base $\mathcal{B}$ formée d'ouverts compacts. Il est alors facile de voir que $\mathcal{B}$ satisfait aux conditions i et ii de la proposition 5.3.

CHAPITRE VI

ANNEAUX REDUITS A SPECTRE MINIMAL COMPACT

Nous avons vu au chapitre IV la difficulté qu'il y a à calculer l'épimorphisme plat maximum dans le cas général. Dans le cas des anneaux réduits à spectre minimal compact, ce problème se résout facilement grâce à un théorème de Pierce qui est le seul critère vraiment simple permettant d'affirmer qu'un espace annelé local est un schéma affine. D'une manière générale, la classe d'anneaux introduite généralise assez bien, pour les questions de platitude, celle des anneaux intègres.

§ 1 : Propriétés générales des anneaux réduits à spectre minimal compact

Commençons par donner quelques théorèmes de stabilité pour le type d'anneau que nous étudions.

Proposition 6.1 : *Soit $\rho : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Si ρ est injectif et plat et si $\text{Min } B$ est compact, $\text{Min } A$ est également compact.*

L'injectivité de ρ entraîne que ${}^a\rho(\text{Min } B) \supset \text{Min } A$ ([9], chap. II, § 2, prop. 16) ; si ρ est de plus plat, on a l'égalité, car si q est un idéal premier minimal de B et p l'idéal premier ${}^a\rho(q)$, le morphisme $A_p \longrightarrow B_q$ est fidèlement plat, ce qui entraîne que A_p est de dimension nulle, donc que p est un idéal premier minimal de A . La proposition résulte alors de ce que ${}^a\rho$ est continue.

Proposition 6.2 : *Si A est un anneau à spectre minimal compact, il en est de même de tout anneau de polynômes à coefficients dans A .*

Soit donc B un anneau de polynômes à coefficients dans A , ρ le morphisme canonique de A dans B . Nous allons montrer que $\text{Min } A$ et $\text{Min } B$ sont homéomorphes. En effet, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier minimal de B , il résulte de la proposition 6.1 que $\mathfrak{q} = {}^a\rho^{-1}(\mathfrak{p})$ est un idéal premier minimal de A ; de plus, $B\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B contenu dans $\mathfrak{p}$, donc égal à $\mathfrak{p}$: on voit donc que la restriction de ${}^a\rho$ à $\text{Min } B$ est une bijection de $\text{Min } B$ sur $\text{Min } A$. Le fait que cette bijection est un homéomorphisme résulte immédiatement de la définition de la topologie spectrale.

Proposition 6.3 : *Si A est un anneau à spectre minimal compact, il en est de même de tout anneau de fractions de A .*

Soit en effet S une partie multiplicative de l'anneau A ; le spectre minimal de $S^{-1}A$ est homéomorphe au sous-espace de $\text{Min } A$ formé par les idéaux premiers minimaux de A qui ne coupent pas S , autrement dit, avec la notation du chapitre V, à $\bigcap_{x \in S} D_m(x)$. Or, nous savons que les $D_m(x)$ sont fermés dans $\text{Min } A$; $\text{Min } S^{-1}A$ est donc homéomorphe à un fermé de $\text{Min } A$, ce qui démontre la proposition.

Nous allons maintenant donner une interprétation algébrique de la compacité du spectre minimal d'un anneau réduit.

Proposition 6.4* : *Pour tout anneau réduit A , les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *$\text{Min } A$ est compact ;*

* : l'équivalence des conditions i et iv a été démontrée indépendamment par Mewborn ([37]).

ii) pour tout x de A , il existe un idéal de type fini a de A tel que

$$xa = \text{Ann}_A (Ax + a) = 0 ;$$

iii) $P_A = \text{Min } A$;

iv) le morphisme canonique de A dans $Q(A)$ est plat.

$i \implies ii$: Soit x un élément de A ; $V_m(x)$ est ouvert et fermé, donc, si $\text{Min } A$ est compact, il existe une partie finie F de A telle que $D_m(F) = V_m(x)$. Si maintenant a est l'idéal de A engendré par F , on voit que, puisque A est réduit, $xa = \text{Ann}_A (Ax + a) = 0$.

$ii \implies iii$: Soit p un idéal premier non minimal de A ; il existe alors un x de A tel que $p \supset Ax + \text{Ann}_A(x)$ (lemme 5.1).

On voit donc que, si A satisfait à la condition ii, p contient l'idéal fidèle et de type fini $Ax + a$, ce qui implique que p n'appartient pas à P_A .

$iii \implies iv$: Soit ρ le morphisme canonique de A dans $Q(A)$ et m un idéal maximal de $Q(A)$. Si ${}^a\rho(m)$ contenait un idéal fidèle de type fini a , il engendrerait l'idéal unité de $Q(A)$, puisque cet anneau est absolument plat et que le morphisme ρ est essentiel ; cela est évidemment en contradiction avec le fait que $aQ(A)$ est contenu dans m , et on a montré que ${}^a\rho(m)$ appartient à P_A . Il en résulte que si $P_A = \text{Min } A$, $Aa_{\rho(m)}$ est un corps ; dans ce cas, le morphisme $Aa_{\rho(m)} \longrightarrow Q(A)$ est plat pour tout idéal maximal m de $Q(A)$: on sait que cela implique que ρ est plat ([9], chap.II, §3, prop.1.5).

$iv \implies i$: Ce dernier point est une conséquence immédiate de la proposition 5.1, le spectre minimal d'un anneau absolument plat étant évidemment compact.

Corollaire 6.5 : Soit A un anneau réduit ; si tout idéal monogène de A est de présentation finie, $\text{Min } A$ est compact.

Dire que tout idéal monogène de A est de présentation finie revient à dire que, pour tout x de A , $\text{Ann}_A x$ est de type fini. Comme $Ax + \text{Ann}_A x$ est toujours fidèle, puisqu'il n'est contenu dans aucun idéal premier minimal, la condition ii de la proposition précédente est alors réalisée avec $a = \text{Ann}_A x$.

Corollaire 6.6 : *Tout anneau cohérent réduit a un spectre minimal compact.*

En effet, si un anneau est cohérent, ses idéaux de type fini sont de présentation finie : la condition du corollaire précédent est donc satisfaite.

On notera qu'il existe des anneaux cohérents dont le spectre minimal n'est pas compact (cf. [33]).

§ 2 : Compacité du spectre minimal, épimorphisme plat maximum et platitude

Nous allons maintenant montrer que, pour les anneaux réduits à spectre minimal compact, l'épimorphisme plat maximum se laisse déterminer très aisément. Pour la définition et les principales propriétés de l'enveloppe $E(A)$ d'un anneau A , nous renvoyons à [48], chap. III et à l'annexe B ; rappelons seulement que, si A est réduit, $E(A)$ est le plus petit sous anneau absolument plat de $\hat{Q}(A)$ qui contienne A .

Proposition 6.7 : *Pour tout anneau réduit A , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) $P(A)$ est absolument plat
- ii) $M(A)$ est absolument plat
- iii) $M(A) = E(A)$
- iv) $\text{Min } A$ est compact.

i $\iff$ ii : C'est une conséquence de la proposition 4.12, un anneau absolument plat étant absolument total.

ii $\implies$ iii : Le morphisme $A \longrightarrow M(A)$ étant essentiel puisque $M(A)$ s'identifie à un sous-anneau de $Q(A)$ (corollaire 4.10), on a une factorisation $A \longrightarrow M(A) \longrightarrow E(A)$; si $M(A)$ est absolument plat, le morphisme $M(A) \longrightarrow E(A)$ est un bimorphisme plat, donc un isomorphisme.

iii $\implies$ ii : C'est clair.

ii $\implies$ iv : C'est une conséquence de la proposition 6.1.

iv $\implies$ ii : Soit $X = \text{Min } A = \text{Ass}_A A$; les fibres de l'espace annelé local $\tilde{A} \mid X$ sont des corps, et X est totalement discontinu (cor. 5.4). Si de plus X est compact, $\tilde{A} \mid X$ est le schéma affine d'un anneau absolument plat que l'on peut identifier à $\Gamma(X, \tilde{A})$ ([41], p. 4). Il résulte alors des propositions 3.21 et 4.1 que X est la plus petite partie affine de $\text{Spec } A$ qui contienne $\text{Ass}_A A$: $M(A) = \Gamma(X, \tilde{A})$ est bien absolument plat.

Avant de continuer l'étude des anneaux réduits à spectre minimal compact, nous allons démontrer que proposition qui concerne la théorie des épimorphismes plats, mais qui nous sera tout de suite nécessaire.

Proposition 6.8 : Soient A un anneau, $\rho : A \longrightarrow B$ un épimorphisme plat, M un A -module ; on suppose que le morphisme canonique de M dans $\rho_* \rho^*(M)$ est injectif ; alors le morphisme composé $M \longrightarrow \rho_* [I_B(\rho^*(M))]$ est une enveloppe injective de M .

Commençons par démontrer le lemme suivant, dont nous aurons besoin par ailleurs.

Lemme 6.9 : Si $\rho : A \longrightarrow B$ est un morphisme plat d'anneaux et I un B -module injectif, alors $\rho_*(I)$ est un A -module injectif.

Soit en effet M un A -module. La platitude de ρ implique que $\text{Tor}_n^A(B, M) = 0$ pour $n > 0$; on a donc un isomorphisme

$$\text{Ext}_B^n(\rho^*(M), N) \longrightarrow \text{Ext}_A^n(M, \rho_*(N))$$

qui permet de conclure ([12], chap. XVI, § 5).

Revenons maintenant à notre proposition ; le lemme précédent montre que $h : M \longrightarrow \rho_* [I_B(\rho^*(M))]$ est un morphisme injectif de M dans un A -module injectif : reste donc à démontrer que h est essentiel. Ce dernier point résulte des propriétés générales des épimorphismes plats. Montrons d'abord que le morphisme $M \longrightarrow \rho_* \rho^*(M)$ est essentiel ; si P est un sous- A -module de $\rho_* \rho^*(M)$ tel que $P \cap M = 0$, on a évidemment $\rho^*(P) = 0$, ce qui implique que P est nul puisque c'est un sous- A -module d'un B -module. On montrerait de même que si u est un morphisme essentiel de B -modules, $\rho_*(u)$ est également essentiel. Finalement, notre morphisme h est composé de deux morphismes essentiels, ce qui achève la démonstration.

Retournons à nos anneaux réduits à spectre minimal compact. La proposition 6.7 entraîne que, sur un tel anneau, il y a beaucoup de A -modules plats. Par exemple :

Proposition 6.10 : Soit A un anneau réduit à spectre minimal compact ; pour tout A -module M , les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) $I_A(M)$ est un A -module plat
- ii) $\text{Ass}_A M \subset \text{Min } A$.

On sait que, si A est un anneau réduit et M un A -module plat, $\text{Ass}_A M$ est contenu dans $\text{Min } A$ ([32], th. 1) ; il suffit donc de montrer que

ii implique i. On peut alors remarquer que la condition ii implique que le morphisme canonique de M dans $M(A) \otimes_A M$ est injectif ([31], chapitre II, prop. 3.3), ce qui permet de conclure à l'aide de la proposition 6.8, puis-que, dans le cas présent, l'anneau $M(A)$ est absolument plat.

Proposition 6.11 : *Pour tout anneau réduit A , les propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) *$\text{Min } A$ est compact*
- ii) $\prod_{p \in \text{Min } A} A_p$ *est un A -module plat*
- iii) $I_A(A)$ *est un A -module plat*
- iv) *l'enveloppe injective d'un A -module plat est un A -module plat*
- v) *tout produit de A -modules injectifs et plats est un A -module plat.*

$i \Rightarrow v$: Désignons par ρ le morphisme canonique de A dans $M(A)$; il résulte de la proposition 6.8 que, si M est un A -module injectif et plat, il existe un $M(A)$ -module M' tel que M soit isomorphe à $\rho_{\star}(M')$: le morphisme $M \otimes_A \rho$ est en effet injectif puisque M est plat. Le résultat découle alors de ce que $M(A)$ est absolument plat si $\text{Min } A$ est compact.

$v \Rightarrow ii$: Il suffit de remarquer que, pour tout p de $\text{Min } A$, A_p est un A -module injectif d'après le lemme 6.9.

$ii \Rightarrow i$: En tant qu'anneau $\prod_{p \in \text{Min } A} A_p$ est un anneau absolument plat ; ce point est donc une conséquence de la proposition 6.1.

$i \Rightarrow iv$: C'est une conséquence de la proposition précédente.

$iv \Rightarrow iii$: C'est clair.

iii $\Rightarrow$ i : C'est encore une conséquence de la proposition 6.1, puisque, A étant réduit, $\mathcal{Q}(A)$ est isomorphe, en tant que A -module, à $I_A(A)$, ([30], § 4.5, prop. 2 et § 4.3, prop. 3).

§ 3 : Compacité du spectre minimal et condition (C)

Nous sommes maintenant bien armés pour examiner les conditions sous lesquelles un anneau réduit à spectre minimal compact possède suffisamment d'éléments réguliers ; la proposition suivante n'est en fait qu'un sorite assez pénible.

Proposition 6.12 : *Pour tout anneau réduit A , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) *Tot (A) est absolument plat*
- ii) *Min A est compact et A possède suffisamment d'éléments réguliers*
- iii) *pour tout x de A , il existe un y de A tel que $xy = \text{Ann}_A(Ax + Ay) = 0$*
- iv) *l'enveloppe injective d'un A -module sans torsion est un A -module plat.*

i $\Rightarrow$ ii : C'est une conséquence immédiate des propositions 1.9 et 6.1.

i $\Rightarrow$ iv : ii entraîne que $P_A = T_A = \text{Min } A$ (prop. 1.2 et 6.4) ; si M est un A -module sans torsion, on a donc $\text{Ass}_A M \subset \text{Min } A$, ce qui implique bien que $I_A(M)$ est un A -module plat (prop. 6.10).

iv $\Rightarrow$ ii : iv entraîne d'une part que $I_A(A)$ est un A -module plat, donc que $\text{Min } A$ est compact (prop. 6.11), d'autre part que tout A -module sans torsion reste sans torsion par extension plate des scalaires, ce qui implique que A possède suffisamment d'éléments réguliers (prop. 2.5).

ii $\Rightarrow$ i : ii implique d'abord que $M(A)$ est absolument plat, ensuite que $M(A) = \text{Tot } (A)$ (prop. 6.7 et 4.15).

$i \implies iii$: On vérifie facilement que la condition iii est vérifiée simultanément par A et $\text{Tot}(A)$, ce qui nous ramène à démontrer qu'un anneau total réduit satisfait à la condition iii si et seulement s'il est absolument plat. Pour cela, on peut remarquer que, A étant réduit, $xy = 0$ est équivalent à $Ax \cap Ay = 0$ si bien que, si A est total, $\text{Ann}_A(Ax + Ay) = xy = 0$ entraîne que $x + y$ est inversible, donc que Ax est facteur direct de A : A est bien absolument plat dans ces conditions. Réciproquement, si A est absolument plat, $\text{Ann}_A x$ est engendré par un idempotent e pour tout x de A , et l'on a évidemment $xe = \text{Ann}_A(Ax + Ae) = 0$.

Voici un cas, très fréquent dans la pratique, où les conditions précédentes sont réalisées.

Proposition 6.13 : *Un anneau ponctuellement intègre dont le spectre minimal est compact possède suffisamment d'éléments réguliers.*

Soient donc A un anneau, ρ le morphisme canonique de A dans $M(A)$, x un élément de A ; si A est ponctuellement intègre, on voit, par globalisation, que Ax est un A -module plat ; si de plus $\text{Min } A$ est compact, $M(A)$ est absolument plat, donc $\rho^*(Ax)$ est un $M(A)$ -module projectif. Or, on sait qu'un module plat de type fini qui devient projectif par extension injective des scalaires est projectif ([13], prop. 2.3). On voit donc ici que Ax est un A -module projectif, et $\text{Ann}_A x$ est engendré par un idempotent e ; on a donc $xe = \text{Ann}_A(Ax + Ae)$, et, d'après la proposition précédente, A possède suffisamment d'éléments réguliers.

Corollaire 6.14 : *Un anneau cohérent de dimension faible finie possède suffisamment d'éléments réguliers.*

On peut en effet montrer qu'un tel anneau est ponctuellement intègre ([7], th. A, et cor. 6.2).

Proposition 6.15 : *Un anneau réduit dont le spectre minimal est compact et dénombrable possède suffisamment d'éléments réguliers.*

Compte tenu de la proposition 6.12, ceci n'est que la proposition 4.3 de [31], chap. IV.

CHAPITRE VII

CONSTRUCTION D'UN CONTRE - EXEMPLE

Ce chapitre sera entièrement consacré à la construction d'un anneau réduit, à spectre minimal compact qui ne possède pas suffisamment d'éléments réguliers. L'idée de base est simple : elle consiste à construire un anneau réduit A tel que, pour tout x de A , il existe un idéal bigène a pour lequel $xa = \text{Ann}_A (Ax + a) = 0$, a ne pouvant être pris monogène pour un x au moins de A . Il résultera alors des propositions 6.4 et 6.12 que $\text{Min } A$ est compact et que A ne possède pas suffisamment d'éléments réguliers. En fait, pour la commodité, nous allons procéder d'une façon apparemment assez différente.

Dans la suite, K désignera un corps algébriquement clos dénombrable. Nous appellerons K -algèbre de fonctions le couple formé par une K -algèbre K^I , I étant un ensemble quelconque, et une sous-algèbre A de K^I . Avec ces données, si φ est un élément de A , nous noterons $\text{sup } \varphi$ (resp. $\text{cosup } \varphi$) le support (resp. le cosupport) de φ , c'est-à-dire l'ensemble des x de I tels que $\varphi(x) \neq 0$ (resp. tels que $\varphi(x) = 0$). Nous dirons que la K -algèbre de fonctions $A \subset K^I$ satisfait à la condition (T) si :

- a) A est dénombrable
- b) pour tout φ non constant de A , $\text{cosup } \varphi \neq \emptyset$.

Montrons d'abord qu'il existe une K -algèbre de fonctions $A_0 \subset K^N$ qui satisfasse à la condition (T) et telle que A_0 ne soit pas réduite aux constantes. Pour cela, notons i une bijection de N sur l'ensemble des élé-

ménents non constants de $K[X, Y]$; pour tout n , le polynôme $i(n)$ possède un zéro (α_n, β_n) dans K^2 puisque K est algébriquement clos. Désignons par α et β les applications de N dans K définies par $\alpha(n) = \alpha_n$, $\beta(n) = \beta_n$, et soit A la sous-algèbre de K^N engendrée par α et β . Il est alors clair que la définition même de α et β entraîne que tout élément non constant de A_0 a un cosupport non vide, donc que la K -algèbre de fonctions $A_0 \subset K^N$ satisfait à la condition T.

Remarquons d'autre part que, si $A \subset K^I$ est une K -algèbre de fonctions satisfaisant à la condition T, A est un anneau connexe, autrement dit les seuls idempotents de A sont 0 et 1 : en effet, si ϵ est un idempotent de A et si a, b sont deux éléments de K non nuls et différents, il est clair que l'on a $\text{cosup}(a\epsilon + b(1-\epsilon)) = \emptyset$, ce qui implique que $a\epsilon + b(1-\epsilon)$ est constant, donc que $\epsilon = 0$ ou que $\epsilon = 1$.

Si $A \subset K^I$ est une K -algèbre de fonctions et si $(\varphi_j)_{j \in J}$ est une famille d'éléments de A telle que $\bigcap_{j \in J} \text{cosup } \varphi_j = \emptyset$, il est clair que l'idéal engendré par les φ_j dans A est fidèle, mais la réciproque n'est nullement vraie ; en particulier, si $A \subset K^I$ satisfait à la condition (T), A n'a aucune raison d'être un anneau total. Disons cependant que, dans ce cas, il reste de la place pour adjoindre à A des éléments qui rendent diviseurs de zéro les éléments non constants de A . Notre intention étant d'itérer le procédé, de passer à la limite inductive et d'obtenir un anneau total, il faut naturellement prendre garde que l'algèbre obtenue après l'adjonction dont nous parlons continue à satisfaire à la condition (T). Voici comment l'on peut y arriver.

Lemme 6.1 : Soient $A \subset K^I$ une K -algèbre de fonctions satisfaisant à la condition (T), λ un élément de A ; il existe alors une K -algèbre de fonctions

$A \subset K^{I \times N}$ satisfaisant encore à la condition (T) et un homomorphisme de K -algèbres $h : A \longrightarrow A_\lambda$ tels qu'il existe λ_1 et λ_2 dans A_λ avec

$$\text{cosup } h(\lambda) = \sup \lambda_1 \cup \sup \lambda_2.$$

La projection $I \times N \longrightarrow N$ induit un homomorphisme injectif $h : K^I \longrightarrow K^{I \times N}$; par abus de notation, nous noterons également h sa restriction à A . D'autre part, il existe une bijection i de $A[X, Y]$ sur N .

Le fait que K soit algébriquement clos entraîne qu'il existe deux applications λ_1 et λ_2 de $E \times N$ dans K satisfaisant aux conditions suivantes :

a) si $\lambda(x) \neq 0$, alors $\lambda_1(x, n) = \lambda_2(x, n) = 0$ pour tout n ;

b) si $f = \sum_{i,j} \alpha_{ij} X^i Y^j$ est un polynôme de $A[X, Y]$ tel qu'il existe $x \in \sup \alpha_{ij} - \sup \lambda$ avec $i + j \geq 1$,

alors $(\lambda, (x, i(f)), \lambda_2(x, i(f)))$ est un zéro, différent de $(0, 0)$,

du polynôme $\sum_{i,j} \alpha_{ij}(x) X^i Y^j$;

c) si $\lambda(x) = 0$ et si $i^{-1}(n)$ et x ne satisfont pas aux conditions du b)

$\lambda_1(x, n)$ et $\lambda_2(x, n)$ sont simplement soumis à la condition de ne pas être nuls tous les deux.

On peut alors vérifier que la sous-algèbre A_λ de $K^{I \times N}$ engendrée par $h(A)$, λ_1 et λ_2 satisfait aux conditions énoncées ; a, c et le fait que, dans b, on prenne un zéro différent de $(0, 0)$ assurent que

$$\text{cosup } h(\lambda) = \sup \lambda_1 \cup \sup \lambda_2 ;$$

quant à b, son rôle est d'assurer que toute combinaison algébrique non constante, à coefficients dans A , de λ_1 et λ_2 est nulle quelque part sur $I \times N$.

Par le procédé dont nous avons parlé (itération et passage à la limite inductive), il n'y a pas de difficulté à obtenir, à partir du lemme précédent, le suivant :

Lemme 6.2 : Soit $A \subset K^I$ une K -algèbre de fonctions satisfaisant à la condition (T). Il existe alors une K -algèbre de fonctions $U(A) \subset K^{I \times \mathbb{N}^Y}$ telle que :

- i) $U(A)$ satisfait aussi à la condition (T)
- ii) pour tout μ de $U(A)$, il existe μ_1 et μ_2 de $U(A)$ tels que $\text{cosup } \mu = \text{sup } \mu_1 \cup \text{sup } \mu_2$
- iii) il existe un homomorphisme injectif de K -algèbres $m : A \longrightarrow U(A)$.

Les conditions i et ii assurent que $U(A)$ est un anneau évidemment réduit, total et à spectre minimal compact. Comme c'est de plus -nous l'avons déjà remarqué- un anneau connexe, il ne peut être absolument plat que si c'est un corps : $U(A)$ serait alors réduit aux constantes. La condition iii montre que ce n'est pas possible si A n'est pas lui-même réduit aux constantes. Comme nous avons vu que cela peut ne pas se produire, nous avons bien prouvé qu'il existe des anneaux réduits, à spectre minimal compact dont l'anneau total des fractions n'est pas absolument plat. Cela répond par la négative à une conjecture formulée par Henriksen et Jerison ([24], P. 116, ligne 10), et nous pouvons de plus énoncer les propositions suivantes :

Proposition 6.3 : Il existe un anneau réduit, à spectre minimal compact, qui ne possède pas suffisamment d'éléments réguliers.

Proposition 6.4 : Il existe un anneau réduit A tel que $\text{Tot}(A) \neq M(A)$.

A N N E X E

- A -

Proposition A.1 : Pour tout monomorphisme plat d'anneaux $\rho : A \longrightarrow B$, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) la suite $A \longrightarrow B \rightrightarrows B \boxtimes_A B$ est exacte

ii) pour tout idéal a de A tel que $aB = B$, $\text{Ext}_A^1(A/a, A) = 0$

iii) $\text{Ass}_A (B/\rho(A)) \subset P_A$

iv) le carré

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(A) & \longrightarrow & P(B) \end{array}$$

est cartésien.

i $\iff$ ii : Désignons par $\mathcal{F}$ le plus grand s.t.i. de A inversé par ρ .

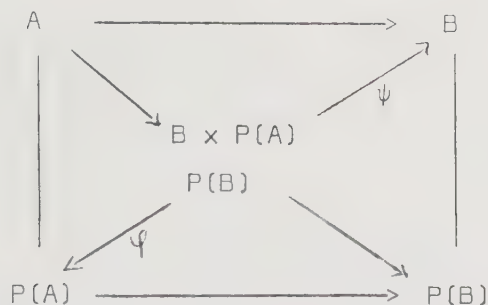
D'après la proposition 3.6, la suite $A \longrightarrow B \rightrightarrows B \boxtimes_A B$ est exacte si et seulement si $A_{\mathcal{F}} = A$, ce qui équivaut à ii.

i $\iff$ iii : Dire que $\text{Ass}_A (B/\rho(A))$ est contenu dans P_A revient à dire qu'aucun idéal fidèle de type fini de A n'annule un élément non nul de $B/\rho(A)$, ou encore que si un système fini d'équations

$$(S) \quad a_i X = b_i$$

où les a_i engendrent un idéal fidèle de A , admet une solution dans B , cette solution est dans A . Or, la platitude de ρ entraîne que (S) a au plus une solution dans $B \boxtimes_A B$, donc que s'il possède une solution dans B , cette solution est dans $\text{Ker} (B \rightrightarrows B \boxtimes_A B)$. Comme réciproquement, tout élément de $\text{Ker} (B \rightrightarrows B \boxtimes_A B)$ est solution d'un système (S), l'équivalence est établie.

iv $\iff$ iii : Considérons le diagramme



et soit u un élément de $B \times P(A)$. Il existe un idéal fidèle de type fini a de A tel que $a \varphi(u) \subset A$, ce qui implique $a \psi(u) \subset A$; si iii est vérifié, cette dernière condition entraîne que $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ sont un même élément de A , et le carré (C) est cartésien.

La réciproque se démontrerait de la même façon.

Corollaire A.2 : Si A est un anneau semi-héréditaire et $\rho : A \longrightarrow B$ un monomorphisme plat, la suite $A \longrightarrow B \rightrightarrows B \boxtimes_A B$ est exacte si et seulement si ρ est fidèlement plat.

En effet, A est cohérent et de dimension faible finie, donc satisfait à la condition (C) ; dire que la suite $A \longrightarrow B \rightrightarrows B \boxtimes_A B$ est exacte, revient donc à dire, d'après la proposition précédente, que $B/\rho(A)$ est sans torsion : or, sur un anneau semi-héréditaire, tout module sans torsion est plat ([14], th. 5), et dire que $B/\rho(A)$ revient à dire que ρ est fidèlement plat.

La réciproque est vraie sans hypothèse sur A .

Nous avons utilisé dans la proposition 6.7 la notion d'enveloppe épimorphe d'un anneau réduit due à Störrer ; montrons ici que cette notion se généralise à un anneau quelconque.

Si $\rho : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, la factorisation "ensembliste" $A \longrightarrow A/\text{Ker } \rho \longrightarrow B$ de ρ en composé d'un monomorphisme et d'un épimorphisme ne satisfait à aucune propriété universelle ; de plus, le morphisme $A/\text{Ker } \rho \longrightarrow B$ n'a aucune tendance à être un "monomorphisme universel", i.e., un morphisme pur ([40]). La décomposition que nous allons donner est en ce sens bien meilleure.

Proposition B.1 : *Tout morphisme d'anneaux $\rho : A \longrightarrow B$ admet une factorisation unique $A \xrightarrow{\rho_1} K \xrightarrow{\rho_2} B$ caractérisée par les propriétés suivantes :*

- i) ρ_1 est un épimorphisme et ρ_2 un monomorphisme
- ii) pour toute factorisation $A \xrightarrow{\sigma_1} L \xrightarrow{\sigma_2} B$ de ρ où σ_1 est un épimorphisme et σ_2 un monomorphisme, il existe un morphisme unique $\alpha : L \longrightarrow K$ tel que $\alpha \circ \sigma_1 = \rho_1$, $\rho_2 \circ \alpha = \sigma_2$.

Soit d'abord $A \xrightarrow{c} C \xrightarrow{c'} B$ une factorisation de ρ , c étant un épimorphisme, et montrons que c' se factorise à travers

$$N = \text{Ker} \left(B \begin{array}{c} \xrightarrow{i_1} \\ \xrightarrow{i_2} \end{array} B \otimes_A B \right).$$

Pour cela, il suffit de montrer que $i_1 \circ c' = i_2 \circ c'$; or, cela résulte de ce que la suite

$$A \xrightarrow{\rho} B \begin{array}{c} \xrightarrow{i_1} \\ \xrightarrow{i_2} \end{array} B \otimes_A B$$

donne par tensorisation par C sur A , la suite $C \xrightarrow{c'} B \begin{array}{c} \xrightarrow{i_1} \\ \xrightarrow{i_2} \end{array} B \otimes_A B$ du

fait des isomorphismes $B \xrightarrow{\sim} B \boxtimes_A C$, $B \boxtimes_A B \xrightarrow{\sim} B \boxtimes_C B$ dus au fait que C est un épimorphisme (lemme 3.14).

On voit en particulier que, si c' est un monomorphisme, l'image de C est dans N . Ceci suggère la construction suivante. Pour toute sous- A -algèbre R de B , posons $R_1 = \text{Ker} (R \rightrightarrows R \boxtimes_A R)$, et, pour tout ordinal λ , $R_\lambda = (R_{\lambda-1})_1$ si λ a un antécédent, $R_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} R_\alpha$ s'il n'en a pas. Il existe donc un ordinal ω tel que $R_\omega = R_{\omega+1}$, et il est alors clair que la factorisation $A \longrightarrow B_\omega \longrightarrow B$ répond aux conditions de la proposition et est la seule à le faire.

Définition B.2 : Pour tout anneau A , soit $A \longrightarrow E(A) \longrightarrow Q(A)$ la factorisation du morphisme $A \longrightarrow Q(A)$ donnée par la proposition précédente ; nous dirons que le morphisme $A \longrightarrow E(A)$ est l'enveloppe épimorphe de l'anneau A .

Proposition B.3 : Tout bimorphisme essentiel d'anneaux $A \longrightarrow B$ factorise d'une façon unique le morphisme $A \longrightarrow E(A)$ et cette propriété caractérise le morphisme $A \longrightarrow E(A)$.

En effet, un bimorphisme $A \longrightarrow B$ est essentiel si et seulement s'il factorise $A \longrightarrow Q(A)$.

On voit que, pour tout anneau A , $M(A)$ s'identifie à un sous-anneau de $E(A)$. Nous n'avons pas pu prouver qu'il en est de même de l'anneau $P(A)$. Cependant :

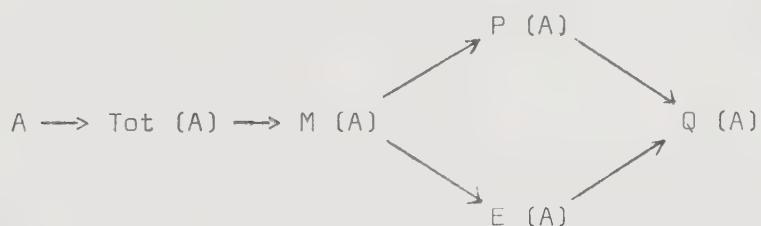
Proposition B.4 : Si A est un anneau tel que $E(A)$ soit absolument total, alors $P(A)$ s'identifie canoniquement à un sous-anneau de $E(A)$.

En effet, si $\mathcal{I}_P$ désigne le s.t.i. des idéaux de A qui contiennent

un idéal fidèle de type fini, on a $E(A) \cong \mathcal{F}_P = E(A)$ par hypothèse, ce qui donne un monomorphisme $P(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_P \longrightarrow E(A)$ (prop. 3.6).

On notera que l'hypothèse de la proposition précédente est satisfaite en particulier si A est réduit, puisque dans ce cas $E(A)$ est absolument plat.

Dans le cas général, on a un diagramme :



où interviennent toutes les généralisations de la notion d'anneau total des fractions qui aient été proposées.

Auslander et Buchsbaum ont montré que si A est un anneau noethérien et M un A -module possédant une résolution finie formée de A -modules libres de type fini, alors ou bien M est fidèle, ou bien $\text{Ann}_A M$ contient un élément régulier de A ([4], prop. 6.2). Depuis, Kaplansky a posé le problème de la généralisation de ce résultat à un anneau quelconque ; nous allons montrer ici que la proposition reste vraie si l'on suppose seulement que l'anneau possède suffisamment d'éléments réguliers.

Proposition C.1 : *Soient A un anneau, M un A -module possédant une résolution libre formée de A -modules libres de type fini ; alors, ou bien $\text{Ann}_A M$ est nul, ou bien il contient un idéal fidèle de type fini.*

Désignons par $F_0(M)$ le 0-ième invariant de Fitting de M . C'est un idéal de type fini de A , puisque M est de présentation finie ; de plus, $F_0(M)$ est contenu dans $\text{Ann}_A M$. La caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi_A(M)$ est définie et constante sur $\text{Spec } A$. Si $\chi_A(M)$ est strictement positive, M est fidèle ([7], lemme 2). Supposons la maintenant nulle ; pour tout p de $\text{Ass}_A A$, A_p est un anneau auto-associé d'après le lemme 2.3 donc M_p est un A_p -module libre ([7], lemme 1). Comme $\chi_{A_p}(M_p)$ est nulle, M_p est en fait nul ; les invariants de Fitting "se localisant", on a donc $(F_0(M))_p = A_p$ pour tout p de $\text{Ass}_A(A)$, ce qui entraîne, d'après le lemme 1.6, que $F_0(M)$ est fidèle, et la proposition est démontrée.

La proposition 6.11 donne une caractérisation des anneaux réduits A qui sont tels que l'enveloppe injective d'un A -module sans torsion est un A -module plat. Nous avons essayé sans grand succès d'obtenir une généralisation de ce résultat aux anneaux quelconques ; la difficulté est qu'il ne semble pas que, dans le cas local autoassocié, on ait obligatoirement des anneaux de dimension nulle. Le cas noethérien est cependant très facile à traiter.

Proposition D.1 : *Pour tout anneau noethérien A , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) l'enveloppe injective d'un A -module sans torsion est un A -module plat ;*
- ii) $I_A(A)$ est un A -module plat ;*
- iii) $\text{Tot}(A)$ est un anneau de Gorenstein.*

L'équivalence des conditions ii et iii est due à Ischikawa ([26], th. 2.4), qui remarque de plus qu'elles entraînent que $\text{Tot } A$ est quasi-frobeniusien, i.e., noethérien et auto-injectif. La condition i impliquant évidemment ii, il nous suffira de démontrer que iii implique i. Nous ne le ferons pas, attendu qu'il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 6.10 (on sait en effet que, sur un anneau quasi-frobeniusien, tout module injectif est projectif ; cf. [15], th. 5.3).

Les anneaux qui satisfont aux conditions de la proposition précédente ont encore beaucoup de propriétés remarquables (cf. l'article d'Ishikawa déjà cité et [16]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. AKIBA : Remarks on generalized rings of quotients ; Proc. Japan Acad., t. 40 (1964), pp. 801-806
- [2] T. AKIBA : Remarks on generalized rings of quotients II ; J. Math. Kyoto Univ., t. 5 (1965), pp. 39-44
- [3] T. AKIBA : Remarks on generalized rings of quotients III ; J. Math. Kyoto Univ., t. 9 (1969), pp. 205-212
- [4] M. AUSLANDER et D.A. BUCHSBAUM : Homological dimension in noetherian rings II Trans. Amer. Math. Soc., t. 88 (1958), pp. 194-206
- [5] M. AUSLANDER et D.A. BUCHSBAUM : Codimension and multiplicity ; Ann. Math., t. 68 n° 3 (1958), pp. 625-657
- [6] H. BASS : Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings ; Trans. Amer. Math. Soc., t. 104 (1962), pp. 516-522
- [7] J. BERTIN : Anneaux cohérents réguliers, C.R. Acad. Paris, T. 273, (1971), série A, pp. 1-2
- [8] N. BOURBAKI : Eléments de Mathématique ; Topologie Générale, Chap. I et II (4e édition) Hermann, Paris (1965)
- [9] N. BOURBAKI : Eléments de Mathématique ; Algèbre Commutative, Chap. I et II Hermann, Paris (1961)
- [10] N. BOURBAKI : Eléments de Mathématique ; Algèbre Commutative, Chap. III et IV, Hermann, Paris (1967)
- [11] N. BOURBAKI : Eléments de mathématique ; Algèbre commutative, Chap. Hermann, Paris
- [12] H. CARTAN et S. EILENBERG : Homological Algebra ; Princeton Univ. Press, Princeton (N-J, U.S.A.), (1965)
- [13] S.H. COX et R.L. PENDLETON : Rings for which certain flat modules are projective ; Trans. Amer. Math. Soc., t. 150 (1970), pp. 139-156
- [14] S. ENDO : On semi-hereditary rings ; J. Math. Soc. Japan, t. 13 (1961), pp. 109-119
- [15] C. FAITH et E.A. WALKER : Direct sum representations of injective modules, J. Algebra, t. 5 (1967), pp. 203-221
- [16] D. FERRAND : Une propriété d'exactitude de l'algèbre symétrique ; Bull. Sc. Math, 2ème série, t. 94 (1970), p. 241-245
- [17] D. FERRAND et M. RAYNAUD : Fibres formelles d'un anneau local noethérien ; Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e série, t. 3 (1970), pp. 295-311
- [18] P. GABRIEL : Des catégories abéliennes ; Bull. Soc. Math. France, t. 90 (1962), pp. 324-448

- [19] R. GOBLOT : Sur deux classes de catégories de Grothendieck ; Thèse, Univ. des Sc. et Techn. de Lille, soutenue le 27 janvier 1971 (n° or. 234)
- [20] A. GROTHENDIECK et J.A. DIEUDONNE : Eléments de Géométrie Algébrique (I) ; Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York (1971)
- [21] A. GROTHENDIECK : Eléments de Géométrie Algébrique ; Publications Mathématiques Bures-sur-Yvette (S-et-O), 1963
- [22] M. HACQUE : Remarques sur les épimorphismes plats d'anneaux ; C.R. Acad. Sc. Paris, série A, t. 268 (1969), pp. 1447-1450
- [23] M. HACQUE : Sur l'existence de l'épimorphisme plat à gauche maximum ; C.R. Acad. Sc. Paris, série A, t. 271 (1970), pp. 1218-1221
- [24] M. HENRIKSEN et M. JERISON : The space of minimal prime ideals of a commutative ring ; Trans. Amer. Math. Soc., t. 115 (1965), pp. 110-130
- [25] M. HOCHSTER : The minimal prime spectrum of a commutative ring ; Can. J. Math., t. 23, n° 5 (1971), pp. 749-758
- [26] T. ISHIKAWA : On injective modules and flat modules ; J. Math. Soc. Japan, t. 17 n° 3 (1965), pp. 291-296
- [27] R.E. JOHNSON : The extended centralizer of a ring over a module, Proc. Amer. Math. Soc., t. 2 (1951), pp. 891-895
- [28] I. KAPLANSKY : Commutative rings ; Allyn et Bacon, inc., Boston (Mass., U.S.A.) 1970
- [29] J. LAMBEK : On Utumi's ring of quotients, Can. J. Math. t. 15 (1963), pp. 363-370
- [30] J. LAMBEK : Lectures on rings and modules ; Blaisdell Publ. Cy, Waltham (Mass., U.S.A.), 1966
- [31] D. LAZARD : Autour de la platitude ; Bull. Soc. Math. France, t. 97 (1969), pp. 81-128
- [32] D. LAZARD : Ass. de modules plats ; C.R. Acad. Sc. Paris, t. 269, série A (1969), pp. 65-67
- [33] P. LE BIHAN : Exemple d'anneau cohérent dont le spectre minimal n'est pas compact ; Publication de l'Université de Montpellier (1969-1970)
- [34] P. LE BIHAN et J. MAROT : Idéaux premiers associés d'anneaux et de modules de sections ; C.R. Acad. Sc. Paris, t. 273, (1971), série A, pp. 279-282
- [35] J. MAROT : Anneaux et Modules de section ; publ. dpt de Math. de l'Université de Brest (Mars 1972)
- [36] J. MERKER : Idéaux faiblement associés, Bull. Soc. Math., t. 93 (1969), pp. 15-21
- [37] A.C. MEWBORN : Some conditions on commutative semiprime rings ; Jour. Algebra, t. 13 (1969), pp. 422-431
- [38] M. NAGATA : Local rings ; Interscience Publishers New-York, Londres (1962)

- [39] C. NASTASESCU et N. POPESCU : On the Localization ring of a ring ;
Jour. Algebra, t. 15 (1970), pp. 41-56
- [40] J.P. OLIVIER : Descente par morphismes purs ; C.R. Acad. Sc. Paris,
Série A, t. 271 (1970), pp. 821-823
- [41] R.S. PIERCE : Modules over commutative regular rings ; Mem. Amer. Math.
Soc., n° 70
- [42] Y. QUENTEL : Sur la compacité du spectre minimal d'un anneau ; Bull. Soc.
Math. France, t. 99 (1971), pp. 265-272
- [43] M. RAYNAUD et L. GRUSON : Critères de platitude et de projectivité ;
Techniques de "platification" d'un module ; Inventiones Math.,
t. 13 (1971), pp. 1-89
- [44] F. RICHMAN : Generalized quotient rings, Proc. Amer. Math. Soc., t. 16
(1965), pp. 794-799
- [45] P. SAMUEL : (Séminaire)
- [46] L. SILVER : Non commutative localisations and applications ; Journ. of
Alg., t. 7 (1967), pp. 44-76
- [47] J.P. SOUBLIN : Anneaux et modules cohérents ; J. Alg., t. 15 (1970),
pp. 455-472
- [48] H. STORRER : Epimorphismen von kommutativen Ringen ; Comm. Math. Helv.,
t. 43 (1968), pp. 378-401
- [49] Y. UTUMI : On quotient rings ; Osaka Math. J., t. 8 (1965), pp. 1-18
- [50] C.E. WATTS : Intrinsic Characterizations of some additive functors, Proc.
Amer. Math. Soc., t. 11 (1960), pp. 5-8.

TABLE DES MATIERES

<u>INTRODUCTION</u>	p. 1
<u>CHAPITRE I</u> : Etude générale des anneaux ayant suffisamment d'éléments réguliers	p. 1
§ 1 : La condition (C)	p. 1
§ 2 : Deux critères pour la condition (C)	p. 1
§ 3 : Les anneaux absolument totaux	p. 5
<u>CHAPITRE II</u> : Modules sans torsion et condition (C)	p. 8
§ 1 : Trois lemmes préparatoires	p. 8
§ 2 : Torsion et extension plate des scalaires	p. 10
<u>CHAPITRE III</u> : Localisations de Gabriel et anneaux de section	p. 14
§ 1 : Quelques propriétés générales des localisations de Gabriel ..	p. 17
§ 2 : Interprétation "faisceautique" des localisations de Gabriel .	p. 23
§ 3 : Quelques propriétés des parties affines d'un spectre	p. 27
<u>CHAPITRE IV</u> : Epimorphisme plat maximum et condition (C)	p. 30
§ 1 : L'anneau $M(A)$	p. 30
§ 2 : L'anneau $P(A)$	p. 31
§ 3 : L'approximation zéro : critères pour que $M_A = P_A$	p. 35
§ 4 : L'approximation un : critères pour que $M(A) = P(A)$	p. 38
<u>CHAPITRE V</u> : Caractérisation topologique des spectres minimaux d'anneau	p. 39
<u>CHAPITRE VI</u> : Anneaux réduits à spectre minimal compact	p. 43
§ 1 : Propriétés générales des anneaux réduits à spectre minimal compact	p. 43
§ 2 : Compacité du spectre minimal, épimorphisme plat maximum et platitude	p. 46
§ 3 : Compacité du spectre minimal et condition (C)	p. 50
<u>CHAPITRE VII</u> : Construction d'un contre-exemple	p. 53

<u>ANNEXE</u>	p. 57
A	p. 57
B	p. 59
C	p. 62
D	p. 63
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	p. 64
<u>TABLE DES MATIERES</u>	p. 67

VU :

Le Président de la Thèse

I. GIORGIUTTI

VU :

Le Directeur de Thèse

D. FERRAND

VU et APPROUVE

RENNES, le

Le Directeur de l'U.E.R. de Mathématiques
et Informatique

J. HOUDEBINE

VU pour autorisation

RENNES, le

Le Président de l'Université de RENNES,

C. CHAMPAUD

